MAT 310 - Notas Complementares

Introdução

O objetivo destas notas é apresentar as isometrias do plano de forma analítica. Alguns resultados apresentados no livro texto são reobtidos de forma analítica. São também apresentadas, as homotetias, as semelhanças e as inversões. Isto, de certa forma, supre a falta desses assuntos, que não aparecem no livro texto.

Capítulo I - Isometrias do Plano

Lembramos que o plano euclidiano é representado por $\mathbb{R}^2$. Uma transformação do plano é uma aplicação bijetora $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Desta forma, F é definida por duas funções de duas variáveis $F_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ou seja, $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$.

Exemplos de transformações são dadas por:

1. $F(x, y) = (x, y)$ (transformação identidade)
2. $F(x, y) = (x^3, y^3)$
3. $F(x, y) = (x + 1, y + 2)$
4. $F(x, y) = (y, x)$

   Entretanto,

5. $F(x, y) = (x, x)$
6. $F(x, y) = (x^2, y^2)$

   Não são transformações do plano.

Observe que no caso 5, F leva todo o plano na reta y=x e, portanto, não é sobrejetora, nem injetora.

Um fato importante aqui é que o conjunto das transformações do plano, munido da operação composição, constitui um grupo e é chamado de **grupo das transformações do plano**. Este grupo possui vários subgrupos, e os que nos interessam são aqueles que preservam as propriedades geométricas do plano. Desta forma, aparece em primeiro lugar o subgrupo C das colineações, ou seja, transformações do plano que preservam retas. Um exemplo de colineação é dada por $F(x, y) = (3x + y, -x + 2y)$. Em geral, para verificar que uma transformação do plano é uma colineação, consideremos uma reta r de equação geral $Ax + By = C$ e provamos que F(r) é uma reta de equação $A'x' + B'y' = C'$, onde (x',y') serão as novas coordenadas em $I\!R^2$.

No caso particular de $F(x, y) = (3x + y, -x + 2y)$, temos que:

- Se B=0, então $A \neq 0$ e $x = \frac{C}{A}$ é a equação de uma reta vertical. Assim, $F(\frac{C}{A}, y) = (\frac{3C}{A} + y, \frac{-C}{A} + 2y)$. Fazendo $x' = \frac{3C}{A} + y$ e $y' = \frac{-C}{A} + 2y$, obtemos a equação $2x' - y' = \frac{7C}{A}$, equação da reta imagem.

- Se $B \neq 0$, então $y = \frac{-A}{B}x + \frac{C}{B}$ e $F(x, \frac{-A}{B}x + \frac{C}{B}) = (3x - \frac{A}{B}x + \frac{C}{B}, -x - \frac{2A}{B}x + \frac{2C}{B})$. Novamente, fazendo $x' = 3x - \frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$ e $y = -x - \frac{2A}{B}x + \frac{2C}{B}$ obtemos a equação $A'x' + B'y' = C'$. Como exercício, obtenham os valores de A', B' e C'.

Um subgrupo importante do grupo das colineações é o subgrupo das isometrias. Uma transformação F é dita uma isometria se F preserva distância. Neste caso, verifica-se que toda isometria é colineação. Mais ainda, toda isometria preserva segmentos, semi-retas, triângulos e medidas de ângulos. O resultado fundamental das isometrias é o seguinte:

Teorema: Sejam F e G duas isometrias do plano e A, B, C, três pontos não colineares tais que $F(A) = G(A)$, $F(B) = G(B)$ e $F(C) = G(C)$. Então, $F(P) = G(P)$ para todo ponto P do plano.

Exercícios:

1. Quais das aplicações abaixo definidas no plano cartesiano são transformações? Quais são colineações?

   (a) $F(x, y) = (x^3, y^3)$

   (b) $F(x, y) = (cos(x), sen(y))$

   (c) $F(x, y) = (x^3 - x, y)$

   (d) $F(x, y) = (2x, 3x)$

   (e) $F(x, y) = (-x, x + 3)$

   (f) $F(x, y) = (3y, x + 2)$

(g) $F(x, y) = (\sqrt[3]{x}, e^y)$

(h) $F(x, y) = (-x, -y)$

(i) $F(x, y) = (x + 2, y - 3)$

2. Encontre a imagem da reta de equação $y = 5x + 7$ pela colineação $F(x, y) = (2x - y, x - 2)$. Encontre também sua pré-imagem.

3. Dê dois exemplos de transformações do plano que não são colineações.

4. Encontre todos os valores de a tal que $F(x, y) = (ay, \frac{x}{3})$ seja uma involução. (F é dita uma involução se $F \circ F = Id$, com $F \neq Id$).

5. Seja $F(x, y) = (x + 3y, y - 3x)$

   (a) Determine F^{-1}.

   (b) F é colineação? Justifique sua resposta.

6. Seja $F(x, y) = (x + ay, bx + 3y)$. Para quais valores de a de b, F é transformação do plano? Para estes valores, determine F^{-1}. F^{-1} é colineação?

Apresentaremos agora, por ordem de simplicidade, as isometrias do plano. Nesta ordem, as mais simples são as translações, seguidas das reflexões em relação a ponto, rotações e reflexões em relação a reta. Isto, como veremos, é devido ao fato de que toda translação pode ser obtida como composta de duas reflexões em relação a ponto, uma reflexão em relação a ponto é um caso particular de uma rotação e toda rotação pode ser obtida como composta de duas reflexões em relação a reta.

Translações

Seja $\vec{v} = (a, b)$. A transformação $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b)$ é chamada de translação de vetor $\vec{v} = (a, b)$.

Exercícios: Verifique que:

1. $T_{\vec{v}}$ é uma isometria.

2. $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{v} + \vec{w}}$

3. $(T_{\vec{v}})^{-1} = T_{\overrightarrow{-v}}$.

Com isto, o conjunto das translações munido da operação de composição forma um subgrupo comutativo do grupo das isometrias.

As translações são caracterizadas por serem transformações do plano tais que se A, B são pontos distintos e A', B' são suas imagens, então ABB'A' é um paralelogramo.

Reflexões em Relação a Ponto

Seja M um ponto do plano. Dado um ponto qualquer do plano P, o ponto refletido de P com relação ao ponto M é o ponto $R_M(P) = M + \overrightarrow{PM}$.

Tomando $M = (a, b)$ e $P = (x, y)$, vemos que $\overrightarrow{PM} = (a - x, b - y)$ e assim a transformação $R_M : I\!R^2 \to I\!R^2$ tal que $R_M(x, y) = (-x + 2a, -y + 2b)$ é a forma analítica da reflexão com relação ao ponto $M = (a, b)$.

Exercício: Verifique que R_M é uma isometria. Além disto, R_M é uma involução.

Provaremos agora o seguinte resultado:

Teorema: Sejam M_1 e M_2 pontos do plano e $\vec{v}$ um vetor. Então:

1. $R_{M_2} \circ R_{M_1} = T_{2\overrightarrow{M_1 M_2}}$
2. $R_{M_1} \circ T_{\vec{v}} = R_M$, onde $M = M_1 - \frac{1}{2}\vec{v}$.

Prova: Sejam $M_1 = (a_1, b_1)$, $M_2 = (a_2, b_2)$ e $\vec{v} = (a, b)$. Então:

1. $R_{M_2} \circ R_{M_1}(x, y) = R_{M_2}(-x + 2a_1, -y + 2b_1) = (-(-x + 2a_1) + 2a_2, -(-y + 2b_1) + 2b_2) = (x + 2(a_2 - a_1), y + 2(b_2 - b_1)) = R_{2\overrightarrow{M_1 M_2}}(x, y)$
2. $R_{M_1} \circ T_{\vec{v}}(x, y) = R_{M_1}(x + a, y + b) = (-x - a + 2a_1, -y - b + 2b_1) = (-x + 2(a_1 - \frac{a}{2}), -y + 2(b_1 - \frac{b}{2})) = R_M(x, y)$ onde $M = (a_1 - \frac{a}{2}, b_1 - \frac{b}{2}) = M_1 - \frac{1}{2}\vec{v}$.
3. Analogamente provamos o item 3.

Exercícios:

1. Complete a prova do teorema acima.

2. São dados três pontos não colineares A, B e C. Determine algebricamente e geometricamente o ponto D do plano tal que $R_D \circ R_A \circ R_B \circ R_A \circ R_C = R_A$. O que se pode afirmar sobre ADA'B onde $A' = R_A(C)$?

3. Dados três pontos não colineares A, B,e C, determine algebricamente e geometricamente o ponto D tal que $T_{3\overrightarrow{AB}} \circ R_C = R_D \circ R_A \circ R_B$.

4. Sejam $M_1 = (2,0)$, $M_2 = (5,1)$, $M_3 = (4,4)$, $M_4 = (1,5)$ e $M_5 = (0,2)$ os pontos médios de um pentágono. Determine os vértices do pentágono.

Rotação

Para dar a definição precisa de rotação é necessário usar a noção de ângulo orientado. Lembramos que um ângulo é formado pela união de duas semi-retas. Assim, o ângulo de vértice B, notado por $A\hat{B}C$ é igual a $\overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$. Apesar da notação $\overrightarrow{BA}$ ser usada para vetores, vamos, no presente contexto, usá-la para denotar uma semi-reta. Como conjunto de pontos, $A\hat{B}C$ é igual a $C\hat{A}B$, entretanto, podemos exigir, ao escrever o ângulo $A\hat{B}C$, que a semi-reta inicial seja $\overrightarrow{AB}$ e que a reta final seja $\overrightarrow{BC}$; desta forma damos uma orientação para $A\hat{B}C$. Com isto, o ângulo orientado $A\hat{B}C$ passa a ser diferente do ângulo orientado $C\hat{B}A$.

Um fato importante que diferencia um ângulo de um ângulo orientado é que a medida de um ângulo é sempre um número positivo, já no caso do ângulo orientado, se for atribuída a medida α a $A\hat{B}C$, então a medida de $C\hat{B}A$ é $-\alpha$. Ademais, usamos a orientação natural do plano euclidiano para definir a medida do ângulo orientado. Com isso, o ângulo $A\hat{B}C$ terá medida positiva α se girando a semi-reta $\overrightarrow{BA}$ para a semi-reta $\overrightarrow{BC}$, o giro é feito no sentido anti-horário. Caso contrário, ou seja, se o giro for no sentido horário, a medida é negativa.

Definição: Sejam dados um ponto O do plano e um número real α, com $-\pi < \alpha \leq \pi$. A rotação de ângulo α e centro O, e a aplicação que fixa O e a imagem de cada ponto $P \neq 0$, é o ponto P' tal que dist(O,P)=dist(O,P') e a medida do ângulo orientado $P\hat{O}P'$ é α. Notaremos essa aplicação por $R_{O,\alpha}$.

Salientamos algumas propriedades de $R_{O,\alpha}$:

1. $R_{O,0}$=Id;

2. $(R_{O,\alpha})^{-1} = R_{O,-\alpha}$ (e portanto $R_{O,\alpha}$ é transformação);

3. $R_{O,\alpha}$ é isometria;

4. Para determinar a imagem $R_{O,\alpha}(r) = r'$ de uma reta r procedemos da seguinte forma:

   (a) Se $O \in r$, r' é a reta que contem O e o ângulo orientado de r para r' mede α;

   (b) Se $O \notin r$, traçamos a reta s, perpendicular à r e passando em O, e obtemos o ponto de interseção P. Rotacionamos o ponto P e obtemos o ponto P'. Traçamos por P' uma perpendicular a $\overrightarrow{OP'}$. Esta perpendicular é a imagem r' da reta r pela rotação $R_{O,\alpha}$. Observe que o ângulo orientado de r para r' tem medida α.

5. Seja $R_{O_2,\alpha_2} \circ R_{O_1,\alpha_1}$, a composta de duas rotações e seja $r'' = R_{O_2,\alpha_2}(r')$ onde $r' = R_{O_1,\alpha_1}(r)$. Então a medida do ângulo orientado de r para r" é $\alpha_1 + \alpha_2$. (Faça uma figura e prove este fato como exercício).

6. Como caso particular de (5), vamos supor que $\alpha = \alpha_2 = -\alpha_1$. Segue daí que r e r" são retas paralelas. (Ou r=r" se $O_1 = O_2$).

Obtemos daí que a isometria $R_{O_2,\alpha} \circ R_{O_1,-\alpha}$ leva uma reta r qualquer em uma reta paralela r" (o caso de r"=r, se $\theta_1 = \theta_2$ implica que $R_{O_2,\alpha} \circ R_{O_1,-\alpha}$=Id). A única isometria que tem essa propriedade é a translação. Assim $R_{O_2,\alpha} \circ R_{O_1,-\alpha} = T_{\vec{v}}$. Para obter $\vec{v}$, observamos que para $O_2' = R_{O_1,\alpha}(O_2)$, $R_{O_2,\alpha} \circ R_{O_1,-\alpha}(O_2') = R_{O_2,\alpha}(O_2) = O_2' + \vec{v}$. Assim, $O_2 = O_2' + \vec{v}$ e, portanto,$\vec{v} = \overrightarrow{O_2'O_2}$.

As considerações acima têm como objetivo obter as rotações de forma analítica.

Comaçamos com o caso em que o centro da rotação é a origem O=(0,0). Seja P=(x,y) um ponto. Então $R_{O,\alpha}(x,y) = (cos(\alpha).x - sen(\alpha).y, sen(\alpha).x + cos(\alpha).y)$. Observamos que $R_{O,\alpha}(0,0) = (0,0)$ e portanto O=(0,0) é um ponto fixo. Ademais $\|R_{O,\alpha}(x,y)\| = \sqrt{(cos(\alpha).x - sen(\alpha).y)^2 + (sen(\alpha).x + cos(\alpha).y)^2} =$
$\sqrt{cos^2(\alpha).x^2 + sen^2(\alpha).y^2 - 2.cos(\alpha).sen(\alpha).x.y + sen^2(\alpha).x^2 + cos^2(\alpha).y^2 + 2.cos(\alpha).sen(\alpha).}$
$\sqrt{(cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)).x^2 + (cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)).y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|$ e desta forma $dist(O,P) = dist(O, R_{O,\alpha}(P))$. Finalmente pela própria definição, a medida de um ângulo orientado de $\overrightarrow{OP}$ para $R_{O,\alpha}(P)$ é α, ou seja, $R_{O,\alpha}$ satisfaz todos os requisitos, sendo, portanto, a rotação de centro O=(0,0) e ângulo α.

Vejamos agora o caso geral em que o centro $O_2 = (a, b)$. Sabemos que $R_{O_2,\alpha} = T_{\vec{v}} \circ R_{O,\alpha}$, O=(0,0) e $\vec{v} = \overrightarrow{O_2'O_2}$, onde $O_2 = R_{O,\alpha}(O_2)$, ou seja $\vec{v} = (a - cos(\alpha).a + sen(\alpha).b, b - sen(\alpha).a - cos(\alpha).b)$. Portanto $R_{O_2,\alpha}(x, y) = T_{\vec{v}}(cos(\alpha).x - sen(\alpha).y, sen(\alpha).x + cos(\alpha).y = (cos(\alpha).x - sen(\alpha).y + a - cos(\alpha).a + sen(\alpha).b, sen(\alpha).x + cos(\alpha).y + b - sen(\alpha).a - cos(\alpha).b = (cos(\alpha)(x - a) - sen(\alpha)(y - b) + a, sen(\alpha)(x - a) + cos(\alpha)(y - b) + b)$.

Temos assim o seguinte resultado:

A forma analítica de uma rotação de centro O =(a,b) e ângulo α é: $R_{O,\alpha}(x, y) = (cos(\alpha)(x-a) - sen(\alpha)(y-b) + a, sen(\alpha)(x-a) + cos(\alpha)(y-b) + b)$. Observamos que a partir desta fórmula pode-se provar o seguinte teorema:

Teorema: Se O=(a,b), $O_1 = (c, d)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que:

1. $R_{O,\alpha} \circ R_{O,\beta} = R_{O,\alpha+\beta}$

2. $R_{O_1,\beta} \circ R_{O,\alpha} = R_{O_3,\alpha+\beta}$, onde $O_3 = (e, f)$, com $e = \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2(1-cos(\alpha+\beta))}((cos(\beta) - cos(\alpha))(a - c) + (sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha) - sen(\beta))(b - d))$ e $f = \frac{b+d}{2} + \frac{1}{2(1-cos(\alpha+\beta))}((cos(\beta) - cos(\alpha))(b - d) - (sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha) - sen(\beta))(a - c))$,

   onde $\alpha + \beta$ não é congruo a 0 módulo π.

3. $R_{O_2,\beta} \circ R_{O_1,\alpha} = T_{\vec{v}}$, se $\alpha + \beta \equiv 0$

Exercícios:

1. Prove o teorema dado. Observe que 1 é conseqüência de 2.

2. Sabendo que $R_{O_1,\alpha} \circ R_{O_2,-\alpha} = T_{\vec{v}}$, determine α, com $-\pi < \alpha \leq \pi$ nos seguintes casos:

   (a) $O_1 = (1, 0)$ e $O_2 = (1, 1)$ e $\vec{v} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}))$.

   (b) $O_1 = (0, 2)$ e $O_2 = (2, 2)$ e $\vec{v} = (-2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. Determine as coordenadas de O_3, sabendo que $R_{O_2,\frac{\pi}{4}} \circ R_{O_1,\frac{\pi}{4}} = R_{O_3,\frac{\pi}{2}}$ e $O_1 = (0, 0)$, $O_2 = (1, 0)$.

4. Complete: "$F(x, y) = (\frac{-x}{2} + \frac{\sqrt{3}y}{2}, \frac{-\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2})$ é a expressão analítica de..."

5. F é uma isometria e tem um único ponto fixo. Prove que F é uma rotação cujo centro é o ponto fixado por F.

6. A transformação $F = R_{O_2,\frac{\pi}{3}} \circ R_{O_1,\frac{\pi}{6}}$, $O_1 = (-1,0)$, $O_2 = (0,1)$ tem um ponto fixo. Determine as suas coordenadas.

7. Dadas as retas $r : x + y = 1$ e $s : 2x + 3y = 1$ e $O = (2,2)$, determine as coordenadas de $R \in r$ e $S \in s$ tais que $m(R\hat{O}S) = \frac{\pi}{4}$.

8. Seja O=(0,0). Determine as coordenadas dos pontos Q_1 e Q_2, sabendo que $O_1 = (0,1)$, $O_2 = (1,0)$, $Q_1 = R_{O_1,\frac{\pi}{6}} \circ R_{O_2,\frac{\pi}{4}}(0)$ e $Q_2 = R_{O_2,\frac{\pi}{4}} \circ R_{O_1,\frac{\pi}{6}}(0)$. Conclua que a operação de composição de rotações com centro em pontos distintos, não é comutativa.

9. Considere os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, onde A=(0,0), B=(1,0), A'=(5,3), $B' = (\frac{10+\sqrt{2}}{2}, \frac{6+\sqrt{2}}{2})$. Determine:
   (a) Uma translação $T_{\vec{v}}$ e uma rotação $R_{0,\alpha}$ tais que $R_{0,\alpha} \circ T_{\vec{v}}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$.
   (b) Uma rotação $R_{0_1,\beta}$ tal que $R_{0_1,\beta}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$.

10. Seja O=(1,1) e r a reta de equação $y = 2x + 1$. Determine as equações das retas $R_{0,\frac{\pi}{4}}(r)$ e $R_{0,\frac{-\pi}{4}}(r)$.

11. Considere ΔABC, A=(1,1), B=(2,1), $C = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}+2}{2})$. Determine o centro O do triângulo e prove que $R_{0,\frac{2\pi}{3}}(A) = C$, $R_{0,\frac{2\pi}{3}}(C) = B$ e $R_{0,\frac{2\pi}{3}}(B) = A$.

Reflexão em relação à reta

Dada uma reta r do plano euclidiano, a reflexão com relação à reta r é a aplicação do plano que fixa a reta r, ponto a ponto, e associa a cada ponto $P \notin r$, o ponto P' tal que $\overline{PP'}$ é perpendicular a r e seu ponto médio está em r. Notaremos a reflexão com relação à reta r por R_r. Como é fácil de observar, R_r é uma transformação do plano que tem como inversa ela própria, ou seja, $R_r^{-1} = R_r$, sendo portanto uma involução. Além disto, R_r é uma isometria do plano. Como o nosso objetivo é apresentar as reflexões com relação a retas de modo analítico, vamos usar dois resultados que nos permitirão obter a fórmula analítica de tais reflexões.

Teorema 1: Sejam *r₁* e *r₂* retas paralelas distintas do plano e $\overleftrightarrow{AB}$ uma reta perpendicular comum a r_1 e a r_2, com $A \in r_1$ e $B \in r_2$. Então $R_{r_2} \circ R_{r_1} = T_{2\overrightarrow{AB}}$.

Prova: Sejam os pontos A, B, C não colineares, onde $C \in r_1$. Observamos que $A \in r_1$ e que $B \in r_2$. Desta forma $R_{r_1}(A) = A$, $R_{r_1}(C) = C$ $\Rightarrow R_{r_2} \circ R_{r_1}(A) = A + 2\ \overrightarrow{AB}$ e $R_{r_2} \circ R_{r_1}(C) = C + 2\ \overrightarrow{AB}$. É fácil ver que $R_{r_2} \circ R_{r_1}(B) = B + 2\ \overrightarrow{AB}$ e, portanto, segue do teorema fundamental que $R_{r_2} \circ R_{r_1} = T_{2\overrightarrow{AB}}$.

Teorema 2: Sejam r_1 e r_2 duas retas concorrentes distintas, O, o ponto de interseção e α, a medida do ângulo orientado de r_1 para r_2, então $R_{r_2} \circ R_{r_1} = R_{O,2\alpha}$.

Prova: Sejam $A \in r_1$ e $B \in r_2$ tais que O, A, B sejam não colineares. Vamos provar que $R_{r_2} \circ R_{r_1}$ coincide com $R_{O,2\alpha}$ nestes três pontos e, portanto, pelo teorema fundamental $R_{r_2} \circ R_{r_1} = R_{O,2\alpha}$.

Primeiramente, $R_{r_2} \circ R_{r_1}(O) = R_{r_2}(O) = O$ e assim O é o ponto fixo. $R_{r_1}(A) = A$ e $R_{r_2}(A) = A'$, onde $\overline{AA'} \perp r_2$ e $\overline{AA'} \cap r_2 = M$ é o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$. Assim, $m(AOA') = 2\alpha$ e dist(O,A)=dist(O,A'). Analogamente, se mostra que se $R_{r_2} \circ R_{r_1}(B) = B'$., teremos que dist(O,B)=dist(O,B') e $m(BOB') = 2\alpha$. Vamos obter agora a fórmula analítica de uma reflexão em torno de uma reta qualquer r.

Caso 1: r é o eixo dos x. Neste caso, $R_{(eixox)}(x, y) = (x, -y)$.

Caso 2: r é a reta de equação y=a, $a \neq 0$. Usando o teorema 1,tomamos A=(0,a) na reta r e B=(0,0) no eixo x. Então $R_{(eixox)} \circ R_r(x, y) = T_{(0,-2a)}(x, y)$ $\Rightarrow R_r(x, y) = R_{(eixox)} \circ T_{0,2a}(x, y) = R_{(eixox)}(x, y - 2a) = (x, -y + 2a)$.

Caso 3: r é a reta de equação x=a, então, r e o eixo x se intersectam no ponto O=(a,0) e a medida do ângulo do eixo x para r é $\frac{\pi}{2}$. Pelo teorema 2, $R_{(eixox)} \circ R_r = R_O$ (pois $R_{O,-\pi} = R_{O,\pi} = R_O \Rightarrow R_r = R_{(eixox)} \circ R_O \Rightarrow$ $R_r(x, y) = R_{(eixox)}(-x + 2a, -y) = (-x + 2a, y)$.

Caso 4: r é a reta de equação y=mx+b, com $m \neq 0$. Neste caso, $m = tg(\alpha)$, onde α é a medida do ângulo orientado do eixo x para a reta r. Um pouco de trigonometria nos dá que $sen(2\alpha) = \frac{2m}{1+m^2}$ e $cos(2\alpha) = \frac{1-m^2}{1+m^2}$.

Observamos ainda que o ponto de interseção da reta r com o eixo x é $O = (\frac{-b}{m}, 0)$. Usando o teorema 2, temos que $R_r = R_{(eixox)} \circ R_{O,-2\alpha}$ e portanto $R_r(x, y) = R_{(eixox)}(cos(2\alpha)(x + \frac{b}{m}) + sen(2\alpha).y - \frac{b}{m}, -sen(2\alpha)(x + \frac{b}{m}) + cos(2\alpha).y) = (cos(2\alpha)(x + \frac{b}{m}) + sen(2\alpha).y - \frac{b}{m}, sen(2\alpha)(x + \frac{b}{m}) - cos(2\alpha).y)$. Finalmente, usando $sen(2\alpha) = \frac{2m}{1+m^2}$ e $cos(2\alpha) = \frac{1-m^2}{1+m^2}$, temos:

$R_r(x, y) = (\frac{1-m^2}{1+m^2}(x + \frac{b}{m}) + \frac{2m}{1+m^2}.y - \frac{b}{m}, \frac{2m}{1+m^2}(x + \frac{b}{m}) - \frac{1-m^2}{1+m^2}.y)$

Podemos ainda escrever:

$R_r(x, y) = \frac{1}{1+m^2}\{(1 - m^2)x + 2m.y - 2b.m, 2m.x - (1 - m^2)y + 2b\}$.

Exemplos:

1. Se r tem equação y=x, temos m=1 e b=0. Logo, $R_r(x,y) = (y,x)$.

2. Se r tem equação y=-x+1, então m=-1, b=1. Logo, $R_r(x,y) = (-y+1, -x+1)$.

Exercícios:

1. Determine a equação da reta r_2 tal que $R_{r_1} \circ R_{r_2} = F$, sabendo que $F(x,y) = (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)$ e r_1 é a reta de equação y=0.

2. Seja r a reta de equação y=x+1. Determine a expressão analítica de R_r.

3. Determine os vértices do triângulo $R_r(\Delta)ABC)$, sendo r a reta de equação y=2x+3, A=(1,9), B=(2,9), C=(1,7).

4. Sejam r_1 e r_2 as retas de equações y=2x+a e 4y=8x+b, respectivamente, onde a e b são constantes, com $4a \neq b$. Determine o vetor $\vec{v}$ do plano, tal que $R_{r_2} \circ Rr_1 = T_{\vec{v}}$.

5. Sejam C a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ e r_1, r_2 retas de equação y=x+2, y=-x-2, respectivamente. Determine as equações de:

   (a) $R_{r_2} \circ R_{r_1}(C)$.

   (b) $R_{O,\pi}(C)$, $O = r_1 \cap r_2$.

6. Considere o ΔABC, A=(1,9), B=(2,9), C=(1,7), a reta r de equação y=x+1 e os vetores $\vec{v} = (6,0)$, $\vec{w} = (1,1)$. Determine a imagem do Δ por:

   (a) $R_r \circ T_{\vec{v}}$.

   (b) $T_{\vec{v}} \circ R_r$.

   (c) $R_r \circ T_{\vec{w}}$.

   (d) $T_{\vec{w}} \circ R_r$.

7. Sendo r_1, r_2, r_3, retas de equações y=1, y=2 e y=2x+1, respectivamente. Calcule a expressão analítica de $R_{r_3} \circ R_{r_2} \circ R_{r_1}$ e de $R_{r_1} \circ R_{r_2} \circ R_{r_3}$.

Capítulo II - Semelhanças do Plano

Homotetias

No estudo das transformações do plano, as isometrias têm um lugar de destaque, uma vez que duas figuras são congruentes se e somente se existe uma isometria que leva uma figura na outra. Entretanto, constitue uma restrição muito séria no estudo das transformações do plano a não inclusão das semelhanças do plano, pois muitos problemas de geometria elementar são resolvidos com o uso de figuras semelhantes. Assim, vamos agora introduzir a noção de homotetia de centro O e de razão $k \neq 0$. Observamos que tal definição será suficiente para completar o estudo das semelhanças. De fato, compondo uma homotetia com as isometrias já estudadas, obteremos todas as semelhanças do plano.

Definição: Uma homotetia com centro O e razão $k \neq 0$ é a aplicação do plano $H_{O,k} : E^2 \to E^2$ definida por $H_{O,k}(P) = O + k.\ \overrightarrow{OP}$. O ponto O é chamado de centro da homotetia e o número k é chamado de razão ou coeficiente da homotetia.

Destacamos a seguir algumas propriedades das homotetias.

1. $H_{O,-1} = R_O$(reflexão em relação ao ponto O) e $H_{O,1} = Id$.

   A verificação do que foi afirmado acima segue da definição dada de homotetia e também da definição de reflexão com relação a um ponto.

2. $H_{O,k_2} \circ H_{O,k_1} = H_{O,k_1 k_2}$.

   Para provar essa igualdade, seja P um ponto qualquer do plano. Então, escrevendo $H_{O,k_1}(P) = P'$, temos que $H_{O,k_2} \circ H_{O,k_1}(P) = H_{O,k_2}(P') = O + k_2 \overrightarrow{OP'}$. Mas $P' = O + k_1 \overrightarrow{OP}$ e portanto $\overrightarrow{OP'} = k_1 \overrightarrow{OP}$. Segue daí que $H_{O,k_2} \circ H_{O,k_1}(P) = O + k_2(k_1) \overrightarrow{OP} = O + (k_1 k_2) \overrightarrow{OP} = H_{O,k_1 k_2}(P)$.

3. Usando (1) e (2) obtemos que $H_{O,k}$ é uma transformação do plano e que $(H_{O,k})^{-1} = H_{O,\frac{1}{k}}$(observe que $k \neq 0$).

4. Se A e B são pontos distintos do plano e $A' = H_{O,k}(A)$, $B' = H_{O,k}(B)$, temos que $\overrightarrow{A'B'} = k\ \overrightarrow{AB}$. Em particular temos que $dist(A', B') = |k| dist(A, B)$. Desta forma, $H_{O,k}$ só é isometria nos casos em que k=1 ou k=-1.

A prova de (4) é obtida facilmente de maneira geométrica, fazendo uma figura para o caso em que $k > 0$ e outra para o caso em que $k < 0$. Depois, basta usar semelhança de triângulos.

5. Segue de (4) que $H_{O,k}$ é colineação e que a imagem r' de uma reta r, por $H_{O,k}$ é ou uma reta paralela a r, se a reta r não contem o centro da homotetia, ou é a própria reta r, caso O esteja em r. Além disto, se r e s são retas concorrentes em P e o ângulo orientado de r para s tem medida α , então r' e s' são concorrentes em $P' = H_{O,k}(P)$ e o ângulo orientado de r' para s' tem medida α.

   Observe que, para P=O, a afirmação acima é imediata, já que r'=r e s'=s.

6. Segue de (5) que dado o Δ ABC, então, se $A' = H_{O,k}(A)$, $B' = H_{O,k}(B)$ e $C' = H_{O,k}(C)$, então Δ ABC e Δ A'B'C' são semelhantes.

7. Uma circunferência de centro P e raio r é levada na circunferência de centro $P' = H_{O,k}(P)$ e raio $|k| .r$.

   Essa propriedade é conseqüência de (4).

8. $H_{O,-k} = R_O \circ H_{O,k}$. (Esta igualdade é conseqüência de (1) e (2)).

Exercícios:

1. São dados dois pontos distintos, A e B, e suas imagens A' e B' por uma homotetia. Determinar o centro O e a razão k dessa homotetia.

2. São dadas duas retas r e s, um ponto A e um real $k \neq 0$. Determine a reta t que passa em A, que intersecta r em B, s em C e tal que $\frac{AB}{AC} = k$.

3. Sejam S uma circunferência e A um ponto de S. Descreva o lugar geométrico dos pontos que são pontos médios de cordas de S que passam em A.

4. Sejam S_1 e S_2 duas circunferências que são tangentes no ponto A e r uma reta que contem A e intersecta S_1 em outro ponto B e S_2 em outro ponto C. Prove que a reta tangente a S_1 em B é paralela à reta tangente a S_2 em C.

5. Seja ABCD um trapézio, onde $\overline{AB}//\overline{CD}$. Sejam E e F pontos tais que ΔABE e ΔCDF triângulos equiláteros, com E e F do mesmo lado de cada base $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Prove que $\overleftrightarrow{EF}$ contem $\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$.

6. Prove que a reta que une os pontos médios dos dois lados paralelos de um trapézio passa no ponto de interseção das extensões dos outros dois lados e também no ponto de interseção das diagonais.

7. Prove que o ponto M de interseção das medianas de um ΔABC, o centro O da circunferência circunscrita, e o ponto H das interseções das alturas, são colineares (a reta que os contêm é chamada de reta de Euler). Ademais, $\frac{HM}{MO} = \frac{2}{1}$.

8. Inscrever um ΔABC em uma dada circunferência S, sendo dados o ponto A e o ponto H, ortocentro do ΔABC.

9. São dadas duas retas r e s e um ponto A que não pertence a nenhuma das retas dadas. Construir uma circunferência que tangencie as retas r e s e que contenha o ponto A.

Semelhanças

Quando duas figuras F e F' são dadas e F' é obtida de F através de uma homotetia $H_{O,k}$, ou seja $F' = H_{O,k}(F)$, dizemos que F e F' são centralmente semelhantes.

Se aplicarmos a F' uma isometria G, obtemos uma outra figura $F'' = G(F')$ e neste caso dizemos que F e F'' são semelhantes. A transformação $G \circ H_{O,k}$ e também $H_{O,k} \circ G$ e suas compostas são chamadas de semelhanças do plano. Quando G é uma rotação ou uma translação, as figuras são ditas diretamente semelhantes. Quando G é uma reflexão ou uma reflexão transladada, as figuras são ditas opostamente semelhantes.

Como exemplo, seja F uma figura centralmente semelhante a uma figura F' com centro O e coeficiente $k > 0$. Rotacione F' de ângulo α e mesmo centro O, a transformação $R_{O,\alpha} \circ H_{O,k}$ é chamada semelhança espiral, com coeficiente k e ângulo α. O ponto O é dito ser o centro da semelhança espiral. É fácil ver que $R_{O,\alpha} \circ H_{O,k} = H_{O,k} \circ R_{O,\alpha}$.

Um outro exemplo é a composta $R_r \circ H_{O,k}$, onde $O \in r$. Neste caso, $R_r \circ H_{O,k}$ é chamada de homotetia refletida e vale também que$R_r \circ H_{O,k} = H_{O,k} \circ R_r$. O e r são chamados de centro e de eixo da homotetia refletida, respectivamente.

Exercícios

1. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ dois segmentos dados. Construir o centro da semelhança espiral que leva o segmento $\overline{AB}$ no segmento $\overline{A'B'}$.

2. Faça tambem a construção da homotetia refletida que leva $\overline{AB}$ em $\overline{A'B'}$.

Expressão Analítica da Homotetia

Seja O=(a,b), $k \neq 0$ e P=(x,y), então $H_{O,k}(P) = H_{O,k}(x,y) = (a,b) + k(x-a, y-b) = (kx + (1-k)a, ky + (1-k)b)$ é a expressão analítica de $H_{O,k}$.

Exercícios:

1. Determine a homotetia que leva:
   (a) A=(1,1) em A'=(5,1) e B=(2,2) em B'=(2, -2).
   (b) A=(3,6) em A'=(3,0) e B=(2,2) em B'=(8,20).

2. Sejam A e B pontos distintos e $k \neq 0$. É verdade que $H_{B,\frac{1}{k}} \circ H_{A,k}$ é uma isometria? Se for verdade, determine esta isometria?

   Veja o caso A=(0,0), B=(1,1) e k=-2.

3. Sejam $H_{O_1,k_1} e H_{O_2,k_2}$ duas homotetias com $O_1 \neq O_2$. Prove:
   (a) $H_{O_1,k_1} \circ H_{O_2,k_2}$ é ou uma translação ou uma homotetia. Neste último caso, determine o centro e a razão.
   (b) Em geral, $H_{O_1,k_1} \circ H_{O_2,k_2} \neq H_{O_2,k_2} \circ H_{O_1,k_1}$.

4. A homotetia $H_{A,k}$ de centro A=(1,-1), leva a origem O=(0,0) no ponto O'=(3, -3). Determine k.

5. Determine a expressão analítica da homotetia espiral de centro O=(1,1), razão 2 e ângulo $\frac{\pi}{2}$. Obtenha a imagem do triângulo ABC, onde A=(0,0), B=(1,0), C=(0,1).

6. Determine a expressão analítica da homotetia refletida $R_r \circ H_{O,2}$, onde O=(0,0) e r é o eixo x.

7. Seja A=(0,0), B=(1,1), A´=(3,1), B´=(0,4). Determine a expressão analítica da homotetia espiral que leva o segmento $\overline{AB}$ no segmento $\overline{A'B'}$.

Exercício (Números Complexos):

Existe uma bijeção entre $\mathbb{R}^2$ e o conjunto dos números complexos C definido por $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \to z = x + iy \in C$. Usando esta bijeção, podemos reescrever as isometrias e as semelhanças do plano como sendo transformações de C.

Notando $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, $z_0 = a + ib$ e $cos\alpha + isen\alpha = e^{i\alpha}$, prove que:

1. $T_{z_0}(z) = z + z_0$ representa a translação de "vetor" z_0.
2. $R_{z_0}(z) = -z + 2z_0$ representa a reflexão em torno do ponto z_0.
3. $R_{z_0}(z) = e^{i\alpha}(z - z_0) + z_0$ representa a rotação de centro z_0 e ângulo α.
4. $R_{eixox}(z) = \overline{z}$ representa a reflexão em torno do eixo x.
5. $R_r(z) = \overline{z} + i(2a)$ representa a reflexão em torno da reta r de equação y=a.
6. $R_r(z) = -\overline{z}$ representa a reflexão em torno do eixo x=0.
7. $R_r(z) = -\overline{z} + (2a)$ representa a reflexão em torno da reta r de equação x=a.
8. $R_r(z) = \frac{1}{1+m^2}\{((1 - m^2) + i(2m))(\overline{z}) + (-2bm + i(2b))\}$ representa a reflexão em torno da reta r de equação y=mx+b.
9. $H_{z_0,k}(z) = kz + (1 - k)z_0$ representa a homotetia de centro z_0 e razão k.

Inversões

Uma Inversão é uma transformação geométrica, definida da seguinte maneira:

Seja O um ponto do plano, chamado de centro da inversão e r um número real positivo, chamado de raio da inversão.

A inversão de centro O e raio r é a transformação do plano que leva cada ponto P do plano em outro ponto P'(não necessariamente diferente) tal que

$$OP.OP' = r^2$$

Notaremos esta inversão por $I_{O,r}(P) = P'$.

Também se costuma dar o nome de Círculo de Inversão ao círculo de centro O e raio r.

A inversão tem algumas propriedades bem interessantes, que a tornam adequada em vários tipos de problemas de geometria euclidiana.

Algumas das mais importantes estão aqui listadas:

1. A inversão é uma involução, ou seja $I_{O,r}(P') = P$ se e somente se $P' = I_{O,r}(P)$ e desta forma ela é uma aplicação bijetora .

2. Os pontos do círculo de inversão são levados em si mesmos pela inversão.

3. Se P é um ponto externo ao círculo de inversão, sua imagem será interna a ele. O ponto pode ser construído assim:

   Se $\overline{PT_1}$,$\overline{PT_2}$ são as tangentes ao círculo de inversão, então

$$P' = \overline{PO} \cap \overline{T_1T_2}$$

4. Se **C** é uma circunferência contendo o ponto O, sua imagem será uma reta que não passa por O e é paralela à tangente por O a **C**.

5. Se uma circunferência passa pelo ponto O, sua imagem será uma reta.

6. Uma reta passando pelo ponto O é levada em si mesma.

7. Se **C** é uma circunferência não contendo o ponto O, sua imagem será uma circunferência que não passa pelo ponto O; os centros de **C** e da circunferência imagem, formam uma linha reta que passa por O. **Observação:** Os centros destas duas circunferências não são o inverso um do outro!

8. Se duas curvas se intersectam em um ponto P e fazem um ângulo de medida α entre elas, seus inversos também farão um ângulo de medida α no ponto invertido.

Exercícios:

1. Considere a circunferência de centro na origem e raio r. Determine analiticamente as coordenadas do ponto $P' = I_{O,r}(P)$, onde P = (x,r). Prove depois que a imagem da reta de equação y = r pela inversão $I_{O,r}$é a circunferência de centro em (0,r/2) e raio r/2.

2. Seja O = (a,b). Prove que para todo $(x, y) \neq (a, b)$,

$$I_{O,r}(x,y) = (\frac{r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2}(x-a)+a, \frac{r^2}{(x-a)^2 + (y-b)^2}(y-b)+b)$$

.

3. Use a fórmula analítica da inversão, para provar as afirmações feitas sobre estas transformações do plano.

4. No exercicio 2, seja $z_0 = a+ib$ e z = x + iy . Mostre que, nos complexos, a inversão é dada por

$$I_{z_0,r}(z) = \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} + z_0$$

.