MAT 240- Lista de Exercícios

1. Dado o ΔABC , seja G o baricentro deste triângulo e M o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Prove que $AG = 2GM$.

2. Seja G o baricentro e O o circuncentro do ΔABC. Na reta que contém G e O tome o ponto P tal que $2GO = GP$ e O - G - P. Prove que se $\overline{AM}$ é uma mediana, então o ΔAGP é semelhante ao ΔMGO. Conclua daí que P é o ortocentro H e portanto O, G, H são colineares.A reta que contém estes tres pontos é chamada de reta de Euler.

3. No ΔABC ,$\overline{AD}$ é a bissetriz interna e $\overline{AE}$ é a bissetriz externa, com $D \in \overline{BC}$ e $E \in \overrightarrow{BC}$. Sabendo que $AB = 12, BC = 10, AC = 8$,calcule DE.

4. O ΔABC é retângulo em A e $m(< BCD) = 30$. A bissetriz do ângulo $< ABC$ intersecta o cateto $\overline{AC}$ em D. Calcule o valor exato de $\frac{AD}{DC}$.

5. Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ dois triângulos tais que $\overline{AB}$ é paralela a $\overline{A'B'}$, $\overline{AC}$ é paralela a $\overline{A'C'}$ e $\overline{BC}$ é paralela a $\overline{B'C'}$. Prove que o ΔABC é semelhante ao $\Delta A'B'C'$ e que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ são retas concorrentes.

6. Mostre que se dois triângulos são semelhantes, então:

   a) as medianas estão na mesma razão que os lados correspondentes.

   b) as alturas estão na mesma razão que as base correspondentes.

7. Prove que num ΔABC o produto de uma base pela altura correspondente, independe da escolha da base.

8. Sejam A e B dois pontos de uma reta e m, n dois reais positivos. Existem, sobre esta reta, dois pontos M e N tais que $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$. Um dos pontos está no interior de $\overline{AB}$ e o outro no exterior.Os pontos M e N são chamados de conjugados harmônicos com relação a $\overline{AB}$.Se AB = 12 e AM = 10 , localize N com relacâo aos outros pontos.Prove também que se M e N são conjugados harmônicos com relação a $\overline{AB}$, então A e B são conjugados harmônicos com relação a $\overline{MN}$.

9. Dado o ΔABC, trace duas perpendiculares $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ à bissetriz $\overline{AD}$, onde $D \in \overline{BC}$, $B', C' \in \overrightarrow{AD}$. Prove que B' e C' são conjugados harmônicos de A,D.

10. Use o exercício anterior para localizar o ponto N, sabendo M,N são conjugados harmônicos de A,B e que AB = 12 e AM = 10, conforme exercício anterior.

11. No ΔABC, $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$ e $\frac{DA}{DB} = \frac{EC}{EA}$. Prove que os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e o ponto médio de $\overline{DE}$ são colineares.

12. Quatro semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ formam ângulos consecutivos de 45 graus. Corta-se estas semi-retas por uma reta r tal que A, B, C, D estão em r e $OA = OD$. Prove que $AB^2 = AD.BC$.

13. Construir um ΔABC, conhecendo a altura AD, a mediana AM e a razão $\frac{AB}{AC}$.

14. Dada uma circunferência e dois raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, traçar uma corda que seja dividida em tres partes iguais pelos dois raios.

15. Em um ΔABC, a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ encontra o lado $\overline{BC}$ em D e a circunferência circunscrita a este triângulo em E. Prove que $EB^2 = EA.ED$.

16. Dado o ΔABC seja $\overline{AD}$ a altura que parte do vértice A. Use o teorema de Pitágoras para provar que $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC.BD$ se o ângulo $\hat{B}$ é agudo e $AC^2 = BC^2 + AB^2 + 2BC.BD$ se o ângulo $\hat{B}$ é obtuso. Use este resultado para obter a sagrada fórmula dos cossenos $b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.cos(\hat{B})$.

17. Prove que em um triângulo, o produto de dois lados é igual ao produto do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo pela altura correspondente ao terceiro lado.

18. No ΔABC, a mediana $\overline{AM}$ tem comprimento m. Prove que $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$. Use este resultado para mostrar que se G é o baricentro, então $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

19. Os lados de um triângulo medem 6, 7 e 11. Calcule os comprimentos das medianas.Calcule também as alturas.

20. No ΔABC, seja D ponto tal que B - D - C. Prove que $AC^2.BD + AB^2.DC = BC(AD^2 + BD.DC)$. Este resultado é conhecido como o teorema de Stewart. No caso em que D é ponto médio de $\overline{BC}$, a relação de Stewart é a relação obtida no exercício 18.

21. Prove que a soma dos quadrados dos lados de um quadrilátero é igual a soma dos quadrados das diagonais mais quatro vezes o quadrado do comprimento do segmento que une os pontos médios das diagonais. Esta relação é chamada de relação de Euler para os quadriláteros.

22. De um ponto P exterior a uma circunferência, trace uma reta secante que intersecta esta circunferência nos pontos A e B e depois trace uma reta tangente que intersecta a circunferência no ponto C. Prove que $PC^2 = PA.PB$. Este número é chamado de potência de P com relação à circunferência.

23. De um ponto P exterior a uma circunferência, trace uma reta secante que intersecta esta circunferência nos pontos A e B de tal forma que $AB^2 = PA.PB$. Para quais pontos P, no exterior da circunferência, este problema tem solução?

24. No ΔABC, sejam D e E os pés da mediana e da bissetriz que saem do vértice A. A circunferência circunscrita ao ΔADE intersecta $\overline{AB}$ em B' e $\overline{AC}$ em C'. Mostre que $BB' = CC'$.

25. Duas regiões poligonais R_1 e R_2 são ditas **equidecomponíveis** quando R_1 e R_2 são somas de regiões poligonais ordenadamente iguais ou congruentes.Dito de outra maneira, R_1 e R_2 são equidecomponíveis se for possível "'cortar"' e "'remontar"' R_1 para obter R_2. Prove:

    a) Duas regiões poligonais equidecomponíveis têm mesma área.

    b) Todo triângulo é equidecomponível com um paralelogramo (e também com um retângulo) de base e altura respectivamente iguais à base e a metade da altura do triângulo.

    c) Dado um polígono convexo, construa um retângulo equidecomponível com um polígono dado (sugestão: use indução no número de lados do polígono).

26. Dois triângulos têm mesma base e mesma altura. Mostre como é feita uma equidecomposição de um no outro.

27. Prove que o retângulo de base 2 e altura 1 é equidecomponível com o quadrado de lado $\sqrt{2}$.

28. Um paralelogramo tem dois lados de comprimento 2 e dois lados de comprimento 1. Ele pode ser recortado em triângulos e remontado no retângulo de base $\sqrt{2}$ e altura 1. Indique um possível recorte e como fazer o remonte. Determine também as medidas de cada triângulo.

29. Dado um pentágono de lado unitário, contruir um retângulo de base unitária e que seja equidecomponível com este pentágono.

30. Usando apenas a definição de π e também que a área de uma circunferência é $\pi.r^2$, prove que $3 < \pi < 3,4$. (Sugestão: o octógono e o dodecágono podem auxiliar na solução)

31. A área da região limitada pela circunferência de raio 1 é o número positivo denotado pela letra grega π. Use poligonos regulares para calcular o valor aproximado de π, com 4 casas decimais.

32. Mostre que a área de um polígono regular de n lados é a metade de seu perímetro pelo apótema (segmento que parte do centro geométrico do polígono regular e é perpendicular a um dos lados).

33. Usando apenas o fato de que a área de um triângulo é a metade do produto da base pela altura e triangulação, encontre a área de um pentágono regular.

34. Encontre a área de um losango que tem uma diagonal que mede 30 e um lado que mede 17.

35. Um paralelogramo tem perímetro igual a 28 e diagonais de medidas 8 e 12. calcule a medida dos lados.

36. O ΔABC é retângulo em A e está inscrito na circunferência C_1. C_2 e C_3 são as circunferências de diâmetro $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. As regiões constituidas pelos pontos interiores a C_2 e exteriores a C_1 ou pelos pontos interiores a C_3 e exteriores a C_1 são chamadas de Luas de Hipócrates. Prove que a soma das áreas das luas é igual à área do triângulo.

37. No quadrilátero ABCD temos que $E = \overline{AC} \cap \overline{BD}$, AC = 30, BD = 25 e $m(< CED) = 45$. Calcule a área deste quadrilátero.

38. No ΔABC, seja D o ponto médio de $\overline{AC}$, E o ponto médio de $\overline{BC}$ e F o ponto de interseção das medianas $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$. Mostre os triângulos ΔAFD e ΔBFE têm mesma área.

39. Seja C um ponto do segmento $\overline{AB}$ e num mesmo plano determinado pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ considere tres semi-circunferências com diâmetros $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$. Seja $\overline{CD}$ o segmento perpendicular a $\overline{AB}$, com D na semi-circunferência de maior raio. Mostre que a área da região limitada pelas tres semi-circunferências é igual a área da região limitada pela circunferência cujo diâmetro é $\overline{CD}$.

40. (Teorema de Heron) Seja $p = \frac{a+b+c}{2}$ o semi-perímetro do ΔABC. Prove que a área deste triângulo é $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (Observação: Uma prova pode ser obtida usando a fórmula dos cossenos).

41. (Lei dos senos) No ΔABC, sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ os ângulos de vértices A, B, C respectivamente. Então, $\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} = 2r$, onde r é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

42. Use a lei dos senos para provar que a área do ΔABC é $\frac{abc}{4r}$, onde a, b, c são os lados e r o raio da circunferência circunscrita.

43. Conhecendo os valores a, b, c dos lados de um triângulo, calcule as alturas, os comprimentos das medianas e o raio da circunferência circunscrita. Quais são estes valores se $a = 10, b = 5, c = 8$?

44. Dadas duas retas paralelas r e s e dois pontos P e Q em r, traçar a circunferência que contém P e Q e é tangente a r.

45. Dado o segmento de comprimento 2, obtenha o segmento de comprimento:

    a) $2\sqrt{7}$

    b) $5/\sqrt{5}$

46. Traçar a reta que passa por um ponto P dado e pelo ponto de interseção de duas retas dadas, sabendo que este ponto de interseção está fora do papel.

47. Dados tres pontos A, B, C, traçar uma reta passando em C e equidistante dos pontos A e B.

48. Dados, uma reta r e um ponto $A \in r$, traçar uma circunferência que passa por um ponto P dado e que seja tangente à reta no ponto A.

49. Dados, uma circunferência e um ponto A a ela pertencente, traçar uma circunferência que passa por um dado ponto P e que seja tangente à reta no ponto A.

50. É dado um ângulo formado por duas semirretas r e s e um ponto P no interior deste ângulo. Construir um segmento $\overline{AB}$ tal que $A \in r$, $B \in s$ e P seja ponto médio do segmento.

51. Construir uma circunferência inscrita em um triângulo dado.

52. Construir um trapézio, sendo dados quatro lados.

53. São dados 5 pontos(coplanares) A, B, C, D, E e sabe-se que eles são tres a tres não colineares. Construir um pentágono tal que os pontos médios de seus lados sejam os pontos dados.

54. Dado um segmento de comprimento 1, construir, com régua e compasso um segmento de comprimento $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

55. Use o exercício anterior para construir o ângulo de medida 36 graus. Com este ângulo construa o pentágono regular, inscrito numa circunferência de raio $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

56. Mostre que:

    a) Se uma semirreta faz ângulos iguais com 3 semirretas de um plano, então esta semirreta é perpendicular ao plano.

    b) Os planos bissetores dos diedros de um triedro se cortam segundo uma reta.

    c) Em todo quadrilátero reverso, os pontos médios dos lados são vértices de um paralelogramo.

    d) Os planos perpendiculares aos lados de um triângulo, nos pontos médios destes lados, se encontram em uma reta perpendicular ao plano do triângulo.

e) A soma das medidas dos ângulos diedros de um prisma indefinido de n faces é igual a (n-2).90.

f) Não existe um poliedro com um número par de faces, tendo cada uma o mesmo número par de lados e com um número impar de vértices.

g) Num cubo, as extremidades de tres arestas que partem de um mesmo vértice, são vértices de um triângulo equilátero.

57. Por um ponto dado, construir um plano paralelo a duas retas reversas.

58. Prove que se duas retas paralelas, uma é paralela a um plano, a outra também é, ou está contida neste plano.

59. Prove que um feixe de planos paralelos que encontra duas retas transversais, determina sobre elas dois conjuntos de segmentos proporcionais.

60. Se um plano e uma reta são paralelos, todo plano perpendicular à reta, é perpendicular ao plano.

61. Mostre que os planos perpendiculares às faces de um triedro e que contém a aresta oposta, concorrem em uma reta.

62. Dados os planos π_1 e π_2 e uma reta r tal que r $\parallel$ π_1 e r $\perp$ π_1, mostre que π_1 e π_2 são planos perpendiculares.

63. Seja ABCD um tetraedro tal que $AD = BD = AC = BC = \sqrt{2}$, $AB = 2$ e $DC = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. calcule a medida do ângulo diedro formado pelas faces ABD e ABC.

64. Um prisma oblíquo tem por base um polígono convexo de 7 lados. Calcule a soma das medidas dos ângulos diedros deste prisma.

65. Uma superfície poliédrica é tal que todas as suas faces são regiões poligonais com o mesmo número de lados e o número de arestas é o dobro do número de vértices. Determine esta superfície.

66. Mostre como se deve conduzir um plano que corte um dado ângulo poliédrico de quatro faces, num paralelogramo. Faça um desenho da pirâmide obtida.

67. Mostre que a soma das medidas dos ângulos das faces de uma pirâmide é 4(V-2).90.

68. Um poliedro convexo, euleriano tem faces triangulares e faces quadrangulares. Sabendo que este poliedro tem 9 arestas e que a soma das medidas dos ângulos das faces é 1440 graus, determine o número de vértices e de faces e faça um esboço deste poliedro.

69. Um poliedro euleriano é tal que $A = 2V$, $3F = 4V$ e todas as suas faces têm o mesmo número de lados. Determine este poliedro.

70. Como deve ser dividida a altura de uma pirâmide, por um plano paralelo à base, para obter dois sólidos de mesmo volume?

71. Um cubo tem aresta de medida 5. Determine a área lateral e o volume de uma pirâmide que tem por base uma face do cubo e por vértice o centro do cubo.

72. Um tronco de prisma reto tem por base um triângulo de área 7. Calcule o volume do tronco, sabendo que as arestas laterais medem 4, 5, 6.

73. Determine o lado da base e a altura de um prisma regular hexagonal, dados o volume V e a área lateral S.

74. Cortar uma pirâmide de altura h por um plano paralelo à base de modo que o volume da pirâmide menor seja 1/8 do volume do tronco.

75. Achar as tres medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo, sabendo a área da base é 72, o volume é 864 e a área total é 552.

76. Mostre que o plano definido por uma aresta de um tetraedro e pelo ponto médio da aresta oposta, separa o tetraedro em dois sólidos de mesmo volume.

77. Prove que um tronco de paralelepípedo reto tem por volume o produto da área de uma seção reta, pela média das quatro arestas.

78. Por cada vértice de um tetraedro qualquer, passamos o plano paralelo à face oposta. Prove que o volume do tetraedro obtido é 27 vezes o volume do tetraedro dado.

79. Dada uma pirâmide de altura $3\sqrt{5}$, a que distância do seu vértice devemos passar um plano paralelo à base de modo que a área lateral do tronco de pirâmide seja 4 vezes a área lateral da pirâmide menor?

80. Calcule o volume de um tronco de paralelepípedo retângulo, sabendo que a área da base vale 10 e que os comprimentos de tres arestas laterais valem 5, 7, 12.

81. Uma pirâmide tem por base um triângulo equilátero de lado 8. Tem uma aresta perpendicular ao plano da base e a medida de outra aresta é 10. Calcule as medidas de todas as arestas e o volume da pirâmide.

82. Uma pirâmide de base horizontal tem altura $h = 6\sqrt[3]{6}$. Um plano paralelo à base divide esta pîrâmide em dois sólidos. O volume do sólido abaixo do plano é 5 vezes o volume do sólido acima do plano. Calcule a distância entre este plano e o vértice da pirâmide.

83. A base de um cone circular reto tem diâmetro de 12 cm e a altura do cone é 12 cm. Enche-se o cone com água e uma esfera é colocada no cone e até alcançar a posição de repouso, metade da esfera fica fora da água. Depois da esfera ser removida, qual é o volume de água que fica no cone?

84. Um cilindro tem raio r e altura h. Sabendo que a área total vale 60π, calcule os valores de r e de h par que o volume seja máximo (use as técnicas de derivadas para calcular máximo de função).

85. Calcule a área total de um cone equilátero cuja geratriz mede g.

86. Inscrever um cilindro num cone de altura h e apótema a, de modo que a área lateral do cilindro seja igual à área lateral do cone que fica acima do cilindro.(No caso do cone, o apótema é a própria geratriz)

87. Prove que a área da superfície esférica de raio r é igual à área da superfície lateral do cilindro equilátero circunscrito.

88. Um plano corta uma esfera de raio r numa circunferência de raio r'. Qual é a distância do plano ao centro da esfera? Calcule a área da calota esférica definida pelo plano.

89. Dados quatro pontos não coplanares A, B, C, D, construa a única esfera que contém estes quatro pontos.

90. Calcule o volume do sólido gerado por um triângulo equilátero que gira ao redor de um eixo paralelo a um lado e que contém o vértice oposto ao lado, sabendo que o lado mede 2.

91. Prove que o volume de uma esfera é 2/3 do volume do cilindro circunscrito.

92. Calcule o volume da esfera inscrita num cone circular de raio r e altura h.

93. Qual é a razão entre a área da superfície esférica e do cone equilátero circunscrito? E entre os volumes?

Sugestões das Soluções e Respostas

1. Se N é o ponto médio de $\overline{AB}$, então AC = 2MN e $\triangle ACG \sim \triangle MNG$ pelo critério AA de semelhança.

2. Use o ex.1 e o critério LAL de semelhança.

3. Use os teoremas da bissetriz interna e externa e obtenha DE = 24.

4. $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2}$

5. Trace as transversais que ligam os vértices correspondentes. Para provar que as retas são concorrentes, tente por absurdo. Observe que se as retas forem paralelas, elas concorrem num ponto do infinito ou ponto ideal.

6. Escreva as razões de semelhança.

7. Seja D o pé da altura que parte do vértice A e E o pé da altura que parte do vértice C. Então o $\triangle ADB$ é semelhante ao triangulo $\triangle CEB$.

8. No caso de m e n serem inteiros, proceda da seguinte maneira: Para obter M, no interior do segmento, dividir o segmento em $m+n$ partes iguais e tomar M o m-ésimo ponto desta divisão. Para obter N, dividir o segmento em $m-n$ partes iguais, caso $m > n$ e se d é o tamanho de cada parte, escolher o ponto N a direita de B e cuja distância para B é

n.d. Se $m < n$, dividir o segmento em $n - m$ partes iguais e tomar N a esquerda de A e cuja distância seja m.d.

9. Use as semelhanças $\triangle ACC' \sim \triangle ABB'$, $\triangle BB'D \sim \triangle CC'D$ e o teorema da bissetriz interna.

10. Use o exercício anterior.

11. Inverta a igualdade dada, some 1 em cada lado e divida por 2 para obter $\frac{AM}{AD} = \frac{AN}{EC}$. Use isto para mostrar que N é ponto médio de $\overline{EF}$, onde F é ponto de $\overline{AC}$, tal que $\overline{DF}$ é paralelo $\overline{BC}$. Conclua dai que o ponto de interseção dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{MN}$ é o ponto médio de $\overline{DE}$.

12. Sem perda de generalidade (por causa da semelhança) podemos supor que OA = OD = 1. Note AB = z, OB = OC = x e BC = y. Use o teorema da bissetriz interna para provar que $z = \frac{y}{x}$. Construa o $\triangle OAE$, isósceles e retângulo em A, para mostrar que $x = \sqrt{2} - 1$ e finalmente verifique que $y(2z + y) = z^2$.

13. Usando o teorema de Pitágoras determine DM. O valor de DC é obtido usando áreas dos $\triangle ABD$ e $\triangle ACD$ e o valor conhecido $\frac{AB}{AC}$.

14. Trace a corda AB prolongando ambos os seus lados para pontos M e N de forma que B e A ficam entre M e N e MB = AB = NA.

15. Use a semelhança $\triangle ABE \sim \triangle BDE$.

16. É só seguir o enunciado.

17. Trace o diâmetro $\overline{AD}$ e observe que os ângulos $\angle ACB$ e $\angle ADB$ são congruentes, conclua que $c = 2rsen(m(\angle ACD))$. Use a fórmula, Área $= \frac{ab\sin(\gamma)}{2}$.

18. Use a lei dos cossenos duas vezes e para a segunda parte use o resultado provado na primeira.

19. medianas: $\frac{7}{2}$,$\frac{\sqrt{265}}{2}$, $2\sqrt{19}$ alturas:$\frac{12\sqrt{10}}{11}$,$\frac{12\sqrt{10}}{7}$, $2\sqrt{10}$.

20. Use a lei dos cossenos nos nos ΔABD e ΔACD, no ângulo de vértice D. Some os resultados, não esquecendo de usar o fato que $cos(\pi - d) = -cos(d)$.

21. Seja ABCD o quadrilátero. Use a relação de Stewart 3 vezes. Nos ΔABD, ΔBCD e ΔACM, onde M é o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$.

22. O triângulo $\triangle PCO$ é retângulo e $(PO)^2 = PA.PB + r^2$.

23. Escreva tudo em função do raio da circunferência.

24. Teorema da bissetriz interna e potência de ponto.

25. Basta seguir a definição dada.

26. Prove que ao transformar os triângulos em paralelogramos estes são equidecomponíveis.

27. Corte o retângulo ao meio obtendo dois quadrados. Depois corte cada quadrado pela diagonal.

28. Transforme primeiro o paralelogramo em retângulo e depois corte ao meio.

29. Divida o pentágono em cinco triângulos e depois divida cada triângulo na metade de sua altura.

30. Siga a sugestão dada.

31.

32. A área de cada triângulo de um polígono regular é base vezes apótema dividido por 2.

33. $A = \frac{5a^2}{4} cot(\frac{\pi}{5}) = \frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$.

34. A= 240.

35. Use a sagrada fórmula dos cossenos. $7+\sqrt{3}$ e $7-\sqrt{3}$.

36. Cálculo direto.

37. As diagonais dividem o quadrilátero em 4 triângulos. Calcule a área de cada um usando a fórmula "‘metade do produto dos lados vezes seno do ângulo"e some as áreas.A resposta é $A = \frac{372\sqrt{2}}{2}$

38. Os ΔABE e ΔACE têm mesma área.

39. O triângulo $\triangle ADB$ é retângulo em D. $\overline{CD}$ divide este triângulo em outros dois, todos semelhantes.

40. Use a lei dos cossenos.

50. Seja Q ponto tal que P ponto médio do segmento $\overline{OQ}$, onde O é o vértice do ângulo. Trace por Q paralelas a r e a s.

54. Construa o segmento de medida $\sqrt{5}$, usando um segmento de medida 2 e um segmento perpendicular de medida 1.

55. Se o $\triangle OAB$ é tal que $OA = OB = 1$ e a medida do ângulo de vértice O é 36, então os outros ângulos medem 72. Tome D em $\overline{OA}$ tal que OD = BD. Use o teorema da bissetriz interna para mostrar que $OD = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Desta forma, o pentágono regular pode ser construido com régua e compasso.

56. Use os postulados do espaço.

69. Resposta: octaedro.

75. Resposta 8, 9 e 12.

76. As alturas são iguais.

77.Divida o tronco dado em dois troncos com bases triangulares e use o exercício 60.

78. Use o fato que os vértices do tetraedro interno são os baricentros das faces do tetraedro externo.

85. O cone equilátero tem o diâmetro da base igual a geratriz e assim a área total é $\frac{3}{4}\pi g^2$.

89. O centro da esfera é o encontro das perpendiculares aos circuncentros dos triângulos ABC e ACD.