MAT 105- Lista de Exercícios

1. Prolongue o segmento com extremos em (1 , -5) e (3 , 1) de um comprimento de $\sqrt{(10)}$ unidades. Determine as coordenadas dos novos extremos.

2. Determine o centro e o raio da circunferência que passa nos pontos (0 , 0) , (3 , -3) e (4 , 5).

3. Tome um paralelogramo e trace um segmento que tem como extremos um vértice e o ponto médio de um dos lados opostos. Prove, de modo analítico, que este segmento corta a diagonal oposta em um ponto que divide os dois sementos na razão $\frac{1}{2}$.

4. O coeficiente angular da reta que passa em (4 , 5) é $\frac{-1}{2}$. Determine as equações das duas retas que pasam em (4 , 5) e formam um ângulo de 45 graus com a reta dada.

5. Justifique a seguinte afirmaçao: Os pontos de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), são pontos colineares se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

   é zero.

6. Um triângulo de 18 unidades de área tem os vértices (2 , 4) e (-2 , 7). O terceiro vértice pode ser qualquer um dos pontos de duas retas. Quais são estas retas? Determine sua equações.

7. Calcular a área dos polígonos cujos vértices são: a) (2 , 3) , (1 , 3) , (3 , 8) , (5 , 5). b) (-2 , 1) , (1 , 3) , (2 , 6) , (-4 , 4) , (-5 , 2).

8. Justifique a seguinte afirmação: Tres retas de equações : $Ax+By+C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ são concorrentes em um ponto se e somente se o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

   é zero (exceto o caso em que as tres retas são paralelas).

9. Determinar k de forma que as retas de equações 7x + ky + 36 , y = x - 4 , x + 2y - 6 = 0 sejam concorrentes.

10. Dado o triângulo de vértices (-3 , 2) , (3 , -2) , (0 , 1) determine:

    a) as equações das retas suportes das medianas e seu ponto comum.

    b) as equações das reta suportes das alturas e seu ponto comum.

    c) as equações das reta suportes das mediatrizes e seu ponto comum.

    d) verifique que estes tres pontos são colineares .

11. escrever a equação do lugar geométrico descrito por um ponto cuja distância a reta de equação x = 4 seja o dobro da distância a reta y = 3.

12. Determine as áreas dos seguintes polígonos:

    a) triângulo de vértices (2,3), (5,7), (-3,4). Resp. 11,5

    b) triângulo de vértices (0,4), (-8,0), (-1,-4). Resp. 30

    c) quadrilátero de vértices (0,0), (5,1), (4,2), (5,20).

    d) pentágono de vértices (5,1), (2,7), (-2,5), (-5,-2), (2,4).

13. Prove que as retas que unem os pontos médios dos lados dos triângulos, do exercício anterior,dividem estes triângulos em 4 triangulos de áreas iguais.

14. Discuta a simetria do gráfico da curva no plano representada pela equação $x^2y - 4y + x = 0$.

15. Faça o esboço do lugar geométrico dos pontos do plano, descrito pela equação:

    a) $x^2 - y^2 = 0$

    b) $x^2 + y^2 = 0$

    c) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 17 = 0$

16. Determine a equação da reta :

    a) paralela ao eixo dos x que dista 5 unidades do ponto (3,-4).

    b) equidistante das retas x + 5 = 0 e x - 2 = 0.

17. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes dos pontos (-2,3) e (3,-1).

18. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias aos eixos coordenados é o quadrado da distância à origem.

19. Determine a equação do lugar geométrico dos pontos do plano tais que a distância de cada um destes pontos ao ponto (3,2) é igual à distância ao eixo dos y.

20. Dados os pontos A = (0,-2), B = (0,4) e C = (0,0), encontre a equaçao do lugar geométrico dos pontos P do plano tais que o produto dos coefientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BP}$ é igual ao coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CP}$.

21. Um segmento de reta de comprimento 10 se desloca de modo que seus pontos extremos estão sobre as retas $x = 5$ e $y = 7$.Determine a equação da curva descrita pelo ponto médio deste segmento.

22. Determine a equação da circunferência que passa nos pontos (0,0), (1,0), (0,1).

23. Encontre a equação da circunferência inscrita no triângulo determinado pelas retas de equações , $2x-3y+21 = 0$, $3x-2y-6 = 0$ e $2x+3y+9$.

24. Encontre a equação da circunferência que passa no ponto (-2,1) e é tangente à reta $3x - 2y - 6 = 0$ no ponto (4,3).

25. Prove que o comprimento do segmento tangente do ponto (x_1, y_1) à circunferência $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ é $\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2}$

26. Encontre a equação da circunferência que passa nos pontos (1,2), (3,4) e é tangente à reta $3x + y - 3 = 0$.

27. Encontre a equação da circunferência de raio 5 e que é tangente à reta $3x + 4y - 16 = 0$ em (4,1).

28. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano tais que a soma dos quadrados das distâncias destes pontos aos pontos (2,3) e (-1,-2) é 34.

29. Encontre as equações das circunferências com raio 15 e tangentes á circunferência $x^2 + y^2 = 100$ no ponto (6,-8).

30. Encontre a equação da circunferência que passa nos pontos de interseção das circunferências $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$ e com centro na reta $y = x$.

31. Encontre a equação da parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo dos x e que passa nos pontos (-2,1) , (1,2) e (-1,3).

32. Dada a parábola de equação $x^2 + 8y - 6x + 4 = 0$, determine as coordenadas do vértice,do foco e a equação da reta diretriz.

33. Encontre a equação da parábola com "latus rectum"segmento de extremos (5,6) e (-3,6).

34. Encontre a equaçao da parábola com vértice (-2,3) e foco (1,3).

35. Encontre a equação da parábola que tem seu vértice na reta $2y-3x = 0$, sua reta diretriz sendo paralela ao eixo dos x e que passa nos pontos (3,5) e (6,-1).

36. O segmento $\overline{AB}$ tem 12 unidades de comprimento e tem um ponto P = (x,y) que dista 8 unidades de A. O segmento se move de tal forma que A está sempre no eixo-x e B está sempre no eixo-y. Determine a equação da curva percorrida por P.

    Resp. $3x^2 + 4y^2 = 192$

37. Dada a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$, determine seus elementos principais.

38. A órbita da terra é uma elipse com o sol em um dos focos. Sabendo que o semi-eixo maior da elipse mede 148800000 km e a excentricidade é aproximadamente $\frac{1}{62}$, calcule a maior e a menor distância da terra para o sol.

39. Encontre a equação da elipse com seu foco em (4,-3), reta diretriz x = -1 e excentricidade $e = \frac{2}{3}$.

    Resp. $\frac{(x-8)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$

40. Determine o lugar geométrico dos pontos P = (x,y) tais o produto do coeficiente angular da reta que passa em P e em (3,-2) com o coeficiente angular da reta que passa em P e em (-2,1) é -6.

    Resp. Elipse de equação $6x^2 + y^2 - 6x + y - 38 = 0$.

41. Encontre a equação da elipse que passa nos pontos (0,1), (1,-1), (2,2), (4,0) e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados.

    Resp. Uma é $28x^2 + 64y^2 - 84x - 49 = 0$, qual é a outra?

42. Encontre os elementos principais da hipérbole:

    a) $4x^2 - 45y^2 = 180$.

    b) $x^2 - y^2 = 25$

43. Determine a equação da hipérbole que tem seu eixo transverso paralelo a um dos eixos coordenados, centro na origem, comprimento do latus rectum 18 e distância entre os focos 12.

    Resp.$3x^2 - y^2 = 27$ e $-x^2 + y^2 = 27$.

44. Determine a equação da hipérbole com focos (0,3) e (0,-3) e eixo conjugado de comprimento 5.

45. Encontre a equação da hipérbole cujo centro é (0,0), um vértice é (6,0) e a equação de uma assíntota é $4x + 3y = 0$.

46. Encontre a equação da hipérbole que passa no ponto (4,6) e cuja assíntotas são $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$.

47. Determine a nova equação da elipse $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$, quando a origem é transladada para (2,-1).

    Resp.$2x'^2 + 3y'^2 = 18$.

48. Determine a translação dos eixos que transforma a equação $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 138$ em uma equação na qual os coeficientes de primeiro grau são nulos.

    Resp. O vetor da translação tem coordenadas (-1,3).

49. Use uma translação de eixos para remover os termos de grau 1 da equação $2xy - x - y + 4 = 0$.

    Resp. $4xy + 7 = 0$

50. Determine a equação da parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$, quando os eixos forem rotacionados de $\pi/4$.

    Resp. $2x'^2 - \sqrt{2}x' - 3\sqrt{2}y' + 3 = 0$.

51. Determine o ângulo que os eixos devem ser rotacionados para remover o termo xy da equação $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

    Resp. $\theta = \pi/6$. A equação transformada é a elipse $x'^2 + 4y'^2 = 4$.

52. Considere a equação geral de uma cônica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ e rotacione os eixos coordenados de ângulo θ obtendo novas coordenadas x' e y' que satisfazem $x = x'cos(\theta) - y'sen(\theta)$ e $y = x'sen(\theta) + y'cos(\theta)$. Substitua na equação inicial e obtenha a equação $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$.

    a) Calcule cada um dos coeficientes A', B', C', D', E' e F'.

    b) Verifique que $A' + C' = A + C$ e que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$.

    c) Verifique que $B' = 0$ se e somente se $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$. Este é o ângulo no qual os eixos devem ser rotacionados, para que o termo x'y' seja suprimido.

    d) Use b) e c) para reconhecer uma cônica, conhecida a sua equação geral, ou seja:

    Se $B^2-4AC < 0$, elipse; Se $B^2-4AC = 0$, parábola e se $B^2-4AC > 0$, hipérbole , resalvados os casos em que a equação pode representar o conjunto vazio, um ponto, um par de retas ,uma circunferência.

53. Dados os pontos (1,1), (2,3), (3,-1), (-3,2), (-2,-1), determine a equação da cônica que passa nestes pontos e reconheça a cônica.

    Resp. $9x^2 + 8xy - 13y^2 - x + 19y - 22 = 0$, que é uma hipérbole.

54. Encontre a equação da cônica que passa nos pontos (5,2), (1,-2), (-1,1), (2,5), (-1,-2).

    Resp. $49x^2 - 55xy + 36y^2 - 110x - 19y - 231 = 0$, que é uma elipse.

55. Determine a distância entre P e Q, sabendo que (40,$\pi/3$) e (1,$\pi/6$) são as coordenadas polares de P e de Q respectivamente.

56. Escreva a equação polar da circunferência de centro A e raio 5, onde (5,0) coordenadas polares de A.

    Resp. $r = 10cos(\theta)$

57. Encontre a área do triângulo cujos vértices têm as seguintes coordenadas polares: (0,0), (6,π/9), (9,5π/18).

    Resp. 13,5

58. Encontre a equação polar da reta que passa no ponto de coordenadas polares (2,π/6) e é perpendicular ao eixo polar.

    Resp. $r = \sqrt{3}sec(\theta)$

59. Encontre as equações polares das retas paralelas ao eixo polar e que distam 4 unidades deste eixo.

    Resp, Uma delas é $r = 4cosec(\theta)$

60. Encontre a equação polar da elipse $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

    Resp. $r^2(4 + 5cos(\theta)^2) = 36$

61. Encontre a forma cartesiana das seguintes equações:

    a) $r = 3cos(\theta)$.

    b) $r = \frac{4}{1-cos(\theta)}$.

    c) $r = \frac{1}{1-2sen(\theta)}$.

    Resp. $x^2 + y^2 - 3x = 0$ (circunferência); $y^2 - 8x - 16 = 0$ (parábola); $x^2 - 3y^2 - 4y - 1 = 0$ (hipérbole).

62. A curva de equação polar $r^2 = 9cos(\theta)$ é chamada de leminiscata. Faça um esboço desta curva.

63. A curva de equação polar $r = 5(1 + cos(\theta))$ é chamada de cardióide. Faça um esboço desta curva.

64. A curva de equação polar $r = 10sen(2\theta)$ é um trevo de 4 folhas. Faça um esboço desta curva e que ela lhe traga muita sorte.

65. Considere o quadrilátero ABCD. Mostre que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ se e somente se $\overrightarrow{AB} = \text{a}\overrightarrow{CD}$.

66. Resolva o sistema nas incógnitas $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, sabendo que $\vec{x} + 3\vec{y} + \vec{z} = \vec{i}$, $\vec{x} + \vec{z} = \vec{j}$, $\vec{y} + 2\vec{z} = \vec{k}$ e que ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) é uma base. É verdade que ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) é uma base?

67. Seja OABC um tetraedro. Verifique que ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$) é uma base e escreva $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, como combinação linear desta base.

68. Seja ABC um triângulo. Tome D no segmento $\overline{AB}$ tal que 2AD = DB e E no segmento $\overline{BC}$ tal que 4BE = EC. Seja F o ponto de interseção dos segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AE}$. Escreva $\overrightarrow{BF}$ como combinação linear de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

69. a) Dados dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, a projeção do vetor $\vec{w}$ na direção do vetor $\vec{v}$ é o vetor $proj_{\vec{v}}\ \vec{w} = \frac{\vec{w}.\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\ \vec{v}$. Interprete geometricamnete este vetor e dê um exemplo.

    b) Resolva a equação $\vec{x}\ .(1, 2, 3)_E = 2$ onde E é uma base ortonormal. Interprete geometricamente o resultado.

70. Exercício 13, pg. 68 do livro texto.

71. Decompor o vetor $\vec{v}$ = (-1, 2, 3) na soma de dois vetores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ tais que $\vec{v_1}$ é paralelo a (0 , 1 , 3) e $\vec{v_2}$ é ortogonal a (0 , 1 , 3).

72. Sejam A, B, C, D, quatro pontos. Mostre que $\overrightarrow{BA}\ .\ \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}\ .\ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}\ .\ \overrightarrow{DA} = 0$.

73. Determine $\vec{x}$ tal que $\vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{k}) = 2\ (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\ )$ e o comprimento do vetor $\vec{v}$ é $\sqrt{6}$.

74. Sabendo que a medida em radiano do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\frac{\pi}{6}$ e que o comprimento de $\vec{u}$ é 1 e o comprimento de $\vec{v}$ é 7 , calcule o comprimento de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

75. Seja OABC um tetraedro regular. Determine $|\frac{(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AO}}{6}|$.

76. Considere o triângulo $\triangle$ABC onde $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$. Prove que se G é o baricentro do triângulo (ponto de interseção das medianas), então

$$G = (\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3})$$

.

77. Verifique que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são retas paralelas, sabendo que $A = (5, 2, -3)$, $B = (6, 1, 4)$, $C = (-3, -2, -1)$, $D = (-1, -4, 13)$.

78. Verifique que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são retas perpendiculares, sabendo que $A = (-11, 8, 4)$, $B = (-1, -7, -1)$, $C = (9, -2, 4)$.

79. Encontre a área do $\triangle$ABC , sabendo que $A = (-11, 8, 4)$, $B = (-1, -7, -1)$, $C = (9, -2, 4)$.

80. Mostre que $A = (5, 1, 5)$, $B = (4, 3, 2)$, $C = (-3, -2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

81. Mostre que $A = (4, 2, 4)$, $B = (10, 2, -2)$, $C = (2, 0, -4)$ são vértices de um triângulo equilátero.

82. Mostre que $A = (5, 1, 5)$, $B = (4, 3, 2)$, $C = (9, 4, 7)$ são pontos não colineares.

83. Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ tres pontos no espaço. Prove que eles são colineares se e somente se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente dependentes.

84. Seja $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 5, 6)$ pontos e $\vec{v}= (2, 8, 12)$,$\vec{w}= (6, 0, -1)$ vetores e $t \in \Re$. Verifique quais das retas de equações paramétricas $P = A + t\ \vec{v}$,$P = A + t\ \vec{w}$,$P = B + t\ \vec{v}$ são paralelas, perpendiculares, ortogonais.

85. Uma reta tem (1,1,1) como vetor diretor e outra tem (1,0,0) como vetor diretor. Qual é a medida do ângulo formado por estas duas retas?

86. Encontre a medida dos ângulos interiores do triângulo cujos vértices são $A = (3, -1, 4), B = (1, 2, -4)C = (-3, 2, 1)$.

87. Prove que os pontos (2,-1,0), (0,-1,-1), (1,1,-3), (3,1,-2) são vértices de um retângulo.

88. Dado o plano de equação $x + y - z = 0$, encontre tres pontos deste plano que não sejam colineares.

89. Os pontos (0,0,0), (1,0,1) e (0,1,1) pertencem a um único plano. Determine a equação deste plano.

90. Determine a equação do plano que contém o ponto (4,-3,2) e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (7, 2, -3)$.

91. Determine a equação do plano que passa na origem e é paralelo ao plano de equação $2x - 3y - z + 4 = 0$.

92. Encontre os pontos de interseção do plano de equação $2x+3y+6z-12 = 0$ com os eixos coordenados.

93. Encontre a distância do ponto (-2,2,3) ao plano de equação 8x - 4y -z -8 = 0. Qual é a distância deste plano ao ponto (0,-2,0)?

94. Encontre a equação do plano que contém: a reta de interseção dos planos $3x + y - 5z + 7 = 0$, $x - 2y + 4z - 3 = 0$ e o ponto (-3,2,-3).

95. Encontre a equação do plano que é paralelo ao plano $2x-3y-6z+14 = 0$ e dista 5 da origem.

96. Verifique que os planos $7x + 4y - 4z + 30 = 0$,$36x - 51y + 12z + 17 = 0$,$14x + 8y - 8z - 12 = 0$,$12x - 17y + 4z - 3 = 0$, formam quatro faces de um paralelepípedo retângulo.

97. Falso ou verdadeiro.

    a) A equação $x^2 + y^2 - 2xy - 4z^2 = 0$ representa dois planos passando na origem.

    b) O conjunto de pontos que satisfazem as equações $x - y + 3z = 0$ e $2x + 5y - 7z = 14$ é uma reta que passa no ponto (2,2,0) e cujo vetor diretor é (-8,13,7).

Observação: Para a primeira lista de exercícios a ser entregue, resolver os exercícios:

1 , 4 , 6 , 10 , 16 , 18 , 20 , 21 , 26 , 30 , 31 , 32 , 37 , 38 , 42 , 44 , 48 , 58 , 59 , 60 .

Para a segunda lista, resolver os exercícios:

65, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 78, 83, 84, 85, 86, 90, 92, 94, 95, 96, 97.