Álgebras seriais sem ciclos truncadas são derivadamente equivalentes a álgebras de incidência de posets

Claudiano Henrique da Cunha Melo

Universidade Federal de Minas Gerais

10 de setembro de 2021

Notações

$\mathbb{k}$ - corpo algebricamente fechado

Notações

$\mathbb{k}$ - corpo algebricamente fechado

Λ - $\mathbb{k}$-álgebra serial sem ciclos truncada

Notações

$\mathbb{k}$ - corpo algebricamente fechado

Λ - $\mathbb{k}$-álgebra serial sem ciclos truncada

mod Λ - categoria de Λ-módulos à direita finitamente gerados

Notações

$\mathbb{k}$ - corpo algebricamente fechado

Λ - $\mathbb{k}$-álgebra serial sem ciclos truncada

mod Λ - categoria de Λ-módulos à direita finitamente gerados

$\mathcal{D}^b(\Lambda)$ - categoria derivada limitada de *mod* Λ

Notações

$\mathbb{k}$ - corpo algebricamente fechado

Λ - $\mathbb{k}$-álgebra serial sem ciclos truncada

mod Λ - categoria de Λ-módulos à direita finitamente gerados

$\mathcal{D}^b(\Lambda)$ - categoria derivada limitada de *mod* Λ

$\mathcal{K}^b(\mathit{proj}\ \Lambda)$ - categoria homotópica de complexos limitados de Λ-módulos projetivos finitamente gerados

Objetivos

Construir o complexo inclinante T_Λ.

Objetivos

Construir o complexo inclinante T_Λ.

Definir o poset S_Λ.

Objetivos

Construir o complexo inclinante T_Λ.

Definir o poset S_Λ.

Mostrar que $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}\ T_\Lambda$ é isomorfa à álgebra de incidência do poset S_Λ^{op}.

Álgebras seriais

Uma álgebra Λ é dita serial à direita se todo Λ-módulo à direita projetivo indecomponível é unisserial.

Uma álgebra Λ é dita serial à direita se todo Λ-módulo à direita projetivo indecomponível é unisserial.

Em [ASS], podemos encontrar o seguinte teorema, que dá uma importante caracterização destas álgebras, em relação ao seu carcás.

Álgebras seriais

Uma álgebra Λ é dita serial à direita se todo Λ-módulo à direita projetivo indecomponível é unisserial.

Em [ASS], podemos encontrar o seguinte teorema, que dá uma importante caracterização destas álgebras, em relação ao seu carcás.

Teorema

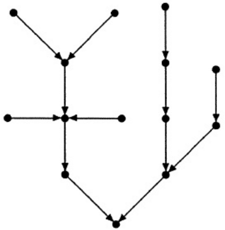
Uma $\mathbb{k}$-álgebra básica A é serial à direita se, e somente se, para todo vértice a de seu carcás Q_A, existir no máximo uma flecha que começa em a.

Em [DrozdKirichenko] podemos encontrar o seguinte resultado.

Teorema

Uma álgebra conexa A é serial à direita se e somente se o seu carcás Q_A ou é uma árvore com um único poço ou possui um único ciclo tal que, quando removidas as flechas deste ciclo, resta uma união disjunta de árvores cujos poços são vértices deste ciclo.

Figura: Exemplo



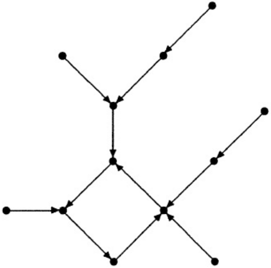
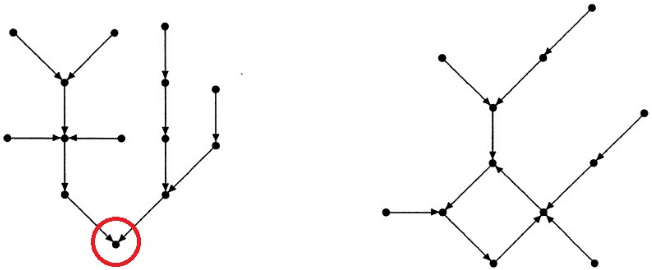
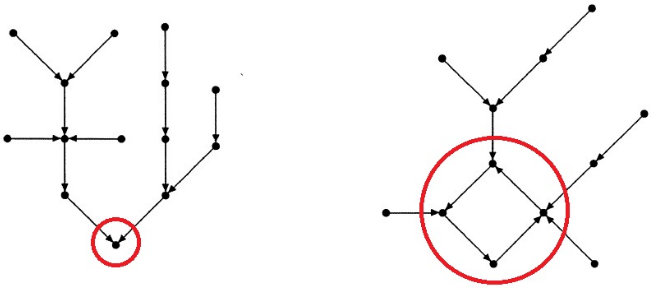


Figura: Exemplo



Caracterização

Figura: Exemplo



Dada uma álgebra de caminhos quocientada por um ideal $A = \dfrac{\mathbb{k}Q}{I}$, dizemos que A é r-truncada se I é o ideal gerado por todos os caminhos de comprimento $r \geq 2$ em $\mathbb{k}Q$, ou seja, se $I = \langle Q_r \rangle$.

Dada uma álgebra de caminhos quocientada por um ideal $A = \dfrac{\Bbbk Q}{I}$, dizemos que A é r-truncada se I é o ideal gerado por todos os caminhos de comprimento $r \geq 2$ em $\Bbbk Q$, ou seja, se $I = \langle Q_r \rangle$.

Exemplo

$\Lambda = \Lambda(10, 3)$:

Álgebras r-truncadas

Dada uma álgebra de caminhos quocientada por um ideal $A = \dfrac{\Bbbk Q}{I}$, dizemos que A é r-truncada se I é o ideal gerado por todos os caminhos de comprimento $r \geq 2$ em $\Bbbk Q$, ou seja, se $I = \langle Q_r \rangle$.

Exemplo

$\Lambda = \Lambda(10, 3)$:

$$0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5 \longleftarrow 6 \longleftarrow 7 \longleftarrow 8 \longleftarrow 9$$

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow Q$ possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow Q$ possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, $\exists!$ caminho $\omega_a : a \to a_0$ em Q

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow Q$ possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, $\exists!$ caminho $\omega_a : a \to a_0$ em Q

$$\omega_a = u_n u_q \dots u_1$$

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow Q$ possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, $\exists!$ caminho $\omega_a : a \to a_0$ em Q

$$\omega_a = u_n u_q \dots u_1$$

onde cada u_i é maximal não nulo em Λ

Álgebras seriais sem ciclos truncadas

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow Q$ possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, $\exists!$ caminho $\omega_a : a \to a_0$ em Q

$$\omega_a = u_n u_q \dots u_1$$

onde cada u_i é maximal não nulo em Λ

Notações: $r^* = r - 1$,

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow$ Q possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, $\exists!$ caminho $\omega_a : a \to a_0$ em Q

$$\omega_a = u_n u_q \dots u_1$$

onde cada u_i é maximal não nulo em Λ

Notações: $r^* = r - 1$, $q = q(\omega)$

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow Q$ possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, $\exists!$ caminho $\omega_a : a \to a_0$ em Q

$$\omega_a = u_n u_q \dots u_1$$

onde cada u_i é maximal não nulo em Λ

Notações: $r^* = r - 1$, $q = q(\omega)$ e $s = s(\omega)$ os números inteiros não-negativos tais que

Álgebras seriais sem ciclos truncadas

Λ é serial à direita sem ciclos r-truncada $\Rightarrow Q$ possui um único poço $a_0 \in Q_0$

Para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, $\exists!$ caminho $\omega_a : a \to a_0$ em Q

$$\omega_a = u_n u_q \dots u_1$$

onde cada u_i é maximal não nulo em Λ

Notações: $r^* = r - 1$, $q = q(\omega)$ e $s = s(\omega)$ os números inteiros não-negativos tais que

$$n = \ell(\omega) = qr^* + s$$

onde $0 < s \leq r^*$.

Complexo inclinante T_Λ

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

Complexo inclinante T_Λ

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

$$T_a: \quad P_{a_0} \xrightarrow{u_1} P_{t(u_2)} \xrightarrow{u_2} P_{t(u_3)} \xrightarrow{u_3} \dots \longrightarrow P_{t(u_q)} \xrightarrow{u_q} P_{s(u_q)} \xrightarrow{u_n} P_a \ ,$$

Complexo inclinante T_Λ

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

$$T_a : \; P_{a_0} \xrightarrow{u_1} P_{t(u_2)} \xrightarrow{u_2} P_{t(u_3)} \xrightarrow{u_3} \dots \longrightarrow P_{t(u_q)} \xrightarrow{u_q} P_{s(u_q)} \xrightarrow{u_n} P_a \; ,$$

onde P_{a_0} está no grau 0; e $T_{a_0} = P_{a_0}$.

Complexo inclinante T_Λ

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

$$T_a: \quad P_{a_0} \xrightarrow{u_1} P_{t(u_2)} \xrightarrow{u_2} P_{t(u_3)} \xrightarrow{u_3} \cdots \longrightarrow P_{t(u_q)} \xrightarrow{u_q} P_{s(u_q)} \xrightarrow{u_n} P_a \ ,$$

onde P_{a_0} está no grau 0; e $T_{a_0} = P_{a_0}$.

Defina $T_\Lambda = \bigoplus_{a \in Q} T_a$

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

$$T_a : \; P_{a_0} \xrightarrow{u_1} P_{t(u_2)} \xrightarrow{u_2} P_{t(u_3)} \xrightarrow{u_3} \dots \longrightarrow P_{t(u_q)} \xrightarrow{u_q} P_{s(u_q)} \xrightarrow{u_n} P_a \;,$$

onde P_{a_0} está no grau 0; e $T_{a_0} = P_{a_0}$.

Defina $T_\Lambda = \bigoplus_{a \in Q} T_a$

Definição

Seja T um objeto de $\mathcal{K}^b(proj\ \Lambda)$.

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

$$T_a: \quad P_{a_0} \xrightarrow{u_1} P_{t(u_2)} \xrightarrow{u_2} P_{t(u_3)} \xrightarrow{u_3} \cdots \longrightarrow P_{t(u_q)} \xrightarrow{u_q} P_{s(u_q)} \xrightarrow{u_n} P_a \ ,$$

onde P_{a_0} está no grau 0; e $T_{a_0} = P_{a_0}$.

Defina $T_\Lambda = \bigoplus_{a \in Q} T_a$

Definição

Seja T um objeto de $\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$. Dizemos que T é um complexo inclinante de Λ se ele satisfaz as condições (1) e (2) a seguir.

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

$$T_a: \; P_{a_0} \xrightarrow{u_1} P_{t(u_2)} \xrightarrow{u_2} P_{t(u_3)} \xrightarrow{u_3} \dots \longrightarrow P_{t(u_q)} \xrightarrow{u_q} P_{s(u_q)} \xrightarrow{u_n} P_a \; ,$$

onde P_{a_0} está no grau 0; e $T_{a_0} = P_{a_0}$.

Defina $T_\Lambda = \bigoplus_{a \in Q} T_a$

Definição

Seja T um objeto de $\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$. Dizemos que T é um complexo inclinante de Λ se ele satisfaz as condições (1) e (2) a seguir.

(1) $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T, T[i]) = 0$ *para todo* $i \neq 0$;

Λ - álgebra serial sem ciclos r-truncada, definimos

$$T_a: \; P_{a_0} \xrightarrow{u_1} P_{t(u_2)} \xrightarrow{u_2} P_{t(u_3)} \xrightarrow{u_3} \dots \longrightarrow P_{t(u_q)} \xrightarrow{u_q} P_{s(u_q)} \xrightarrow{u_n} P_a \;,$$

onde P_{a_0} está no grau 0; e $T_{a_0} = P_{a_0}$.

Defina $T_\Lambda = \bigoplus_{a \in Q} T_a$

Definição

Seja T um objeto de $\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$. Dizemos que T é um complexo inclinante de Λ se ele satisfaz as condições (1) e (2) a seguir.

(1) $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T, T[i]) = 0$ *para todo* $i \neq 0$;

(2) $add(T)$ *gera* $\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$ *como categoria triangulada.*

Exemplo

$\Lambda = \Lambda(10,3)$:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8 \leftarrow 9$$

Álgebras de Nakayama

Exemplo

$\Lambda = \Lambda(10,3)$:

$$0 \longleftarrow 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5 \longleftarrow 6 \longleftarrow 7 \longleftarrow 8 \longleftarrow 9$$

$$\begin{array}{lcll}
T_0 & = & P_0 & \\
T_i & = & P_0 \longrightarrow P_i; & i = 1,2 \\
T_j & = & P_0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_j; & j = 3,4 \\
\vdots & & & \\
T_9 & = & P_0 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_4 \longrightarrow P_6 \longrightarrow P_8 \longrightarrow P_9 &
\end{array}$$

Complexo inclinante T_Λ

Note que os somandos do complexo T_Λ geram $\mathcal{K}^b(proj\ \Lambda)$.

Note que os somandos do complexo T_Λ geram $\mathcal{K}^b(\mathit{proj}\ \Lambda)$.

Isto segue das sequências exatas curtas de complexos

Note que os somandos do complexo T_Λ geram $\mathcal{K}^b(proj\ \Lambda)$.

Isto segue das sequências exatas curtas de complexos

$$0 \longrightarrow P_i[-(q_i+1)] \longrightarrow T_i \longrightarrow T_{q_i r^*} \longrightarrow 0$$

para todo i.

Exemplo

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & & & & \\
P_9[-5] \arrow[d] & & & & & & P_9 \arrow[d] \\
T_9 \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_4 \arrow[r] \arrow[d] & P_6 \arrow[r] \arrow[d] & P_8 \arrow[r] \arrow[d] & P_9 \\
T_8 \arrow[d] & P_0 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_4 \arrow[r] & P_6 \arrow[r] & P_8 & \\
0 & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

Agora precisamos apenas mostrar que $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ se $i \neq 0$.

Complexo inclinante T_Λ

Agora precisamos apenas mostrar que $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ se $i \neq 0$.

O vértice 0 é um poço

Agora precisamos apenas mostrar que $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ se $i \neq 0$.

O vértice 0 é um poço $\Rightarrow \nexists$ morfismo $P_x \longrightarrow P_0$ para nenhum $x \in Q_0 \setminus \{0\}$.

Complexo inclinante T_Λ

Agora precisamos apenas mostrar que $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ se $i \neq 0$.

O vértice 0 é um poço $\Rightarrow \nexists$ morfismo $P_x \longrightarrow P_0$ para nenhum $x \in Q_0 \setminus \{0\}$. Portanto, $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ para todo $i < 0$.

Agora precisamos apenas mostrar que $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ se $i \neq 0$.

O vértice 0 é um poço $\Rightarrow \nexists$ morfismo $P_x \longrightarrow P_0$ para nenhum $x \in Q_0 \setminus \{0\}$. Portanto, $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ para todo $i < 0$.

$$
\begin{tikzcd}
T_i : & P_0 \arrow[r] & P_x \arrow[r] \arrow[d, "\nexists"] & \dots \\
T_j[-1] : & & P_0 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

Por outro lado, como Λ é r-truncada, não existe morfismo $P_0 \longrightarrow P_j$ para nenhum $j \geq r$.

Por outro lado, como Λ é r-truncada, não existe morfismo $P_0 \longrightarrow P_j$ para nenhum $j \geq r$. Portanto, segue que $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ para todo $i \geq 2$.

Por outro lado, como Λ é r-truncada, não existe morfismo $P_0 \longrightarrow P_j$ para nenhum $j \geq r$. Portanto, segue que $Hom(T_\Lambda, T_\Lambda[i]) = 0$ para todo $i \geq 2$.

$$\begin{tikzcd}
T_i : & & & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\nexists"] & \dots \\
T_j[2] : & P_0 \arrow[r] & P_{r^*} \arrow[r] & P_j \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Por fim, o caso $i = 1$.

Por fim, o caso $i = 1$.

Se existir um morfismo de complexos não nulo $\varphi : T_i \to T_j[1]$

Complexo inclinante T_Λ

Por fim, o caso $i = 1$.

Se existir um morfismo de complexos não nulo $\varphi : T_i \to T_j[1]$

$$\begin{tikzcd}
T_i : & & P_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & P_{r^*} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & \dots \\
T_j[1] : & P_0 \arrow[r] & P_{r^*} \arrow[r] & P_j \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Por fim, o caso $i = 1$.

Se existir um morfismo de complexos não nulo $\varphi : T_i \to T_j[1]$

$$
\begin{tikzcd}
T_i : & & P_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & P_{r^*} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & \dots \\
T_j[1] : & P_0 \arrow[r] & P_{r^*} \arrow[r] & P_j \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

mostramos como construir uma homotopia
$h : T_i \to T_j = T_j[1][-1]$ entre o morfismo de complexos φ e o morfismo nulo.

Por fim, o caso $i = 1$.

Se existir um morfismo de complexos não nulo $\varphi : T_i \to T_j[1]$

$$\begin{tikzcd}
T_i : & & P_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & P_{r^*} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dotted] & \dots \\
T_j[1] : & P_0 \arrow[r] & P_{r^*} \arrow[r] & P_j \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

mostramos como construir uma homotopia
$h : T_i \to T_j = T_j[1][-1]$ entre o morfismo de complexos φ e o morfismo nulo. Portanto, $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j[1]) = 0$.

Assim, concluímos que T_Λ é um complexo inclinante.

Assim, concluímos que T_Λ é um complexo inclinante.

Passamos agora para a construção do poset S_Λ.

Poset S_Λ

Definimos $R_\Lambda \subseteq Q_0 \times Q_0$ da seguinte maneira:

Definimos $R_\Lambda \subseteq Q_0 \times Q_0$ da seguinte maneira:

$$R_\Lambda = \{(i,j) \in Q_0 \times Q_0 \mid \text{o morfismo } 1_{P_0} \text{ estende-se para um morfismo de } Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)\}.$$

Poset S_Λ

Definimos $R_\Lambda \subseteq Q_0 \times Q_0$ da seguinte maneira:

$$R_\Lambda = \begin{array}{c} \{(i,j) \in Q_0 \times Q_0 \mid \text{o morfismo } 1_{P_0} \text{ estende-se} \\ \text{para um morfismo de } Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)\}. \end{array}$$

Definimos também os conjuntos

Definimos $R_\Lambda \subseteq Q_0 \times Q_0$ da seguinte maneira:

$$R_\Lambda = \{(i,j) \in Q_0 \times Q_0 \mid \text{o morfismo } 1_{P_0} \text{ estende-se para um morfismo de } Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)\}.$$

Definimos também os conjuntos

$$\begin{aligned}
R_{\Lambda,0} &= \{(i,i) \mid i \in Q_0\};\\
R_{\Lambda,1} &= \{(i,j) \in Q_0 \times Q_0 \mid i < j,\ q_j = q_i\};\\
R_{\Lambda,2} &= \{(i,j) \in Q_0 \times Q_0 \mid i < j,\ q_j = q_i + 1,\ s_i < s_j\};\\
R_{\Lambda,3} &= \{(i,j) \in Q_0 \times Q_0 \mid i < j,\ q_j > q_i + 1,\ r^* \text{ não divide } i\};\\
R_{\Lambda,4} &= \{(i,j) \in Q_0 \times Q_0 \mid j < i,\ r^* \text{ divide } j\}.
\end{aligned}$$

Poset S_Λ

Para cada $(i,j) \in \bigsqcup_{k=0}^{4} R_{\Lambda,k}$ vamos definir um morfismo $\varphi_{i,j} \in Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)$ que estende o morfismo 1_{P_0}.

Para cada $(i,j) \in \bigsqcup_{k=0}^{4} R_{\Lambda,k}$ vamos definir um morfismo $\varphi_{i,j} \in Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)$ que estende o morfismo 1_{P_0}.

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,0}$*:* Neste caso $j = i$ e $\varphi_{i,j} := 1_{T_i}$.

Para cada $(i,j) \in \bigsqcup_{k=0}^{4} R_{\Lambda,k}$ vamos definir um morfismo $\varphi_{i,j} \in Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)$ que estende o morfismo 1_{P_0}.

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,0}$*:* Neste caso $j = i$ e $\varphi_{i,j} := 1_{T_i}$.

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,1}$*:* Neste caso $i < j$ e $q_j = q_i$, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo.

Para cada $(i,j) \in \bigsqcup_{k=0}^{4} R_{\Lambda,k}$ vamos definir um morfismo $\varphi_{i,j} \in Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)$ que estende o morfismo 1_{P_0}.

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,0}$*:* Neste caso $j = i$ e $\varphi_{i,j} := 1_{T_i}$.

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,1}$*:* Neste caso $i < j$ e $q_j = q_i$, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo. Note que $j - i = s_j - s_i$.

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_0}"] & P_{r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_{r^*}}"] & P_{2r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_{2r^*}}"] & \dots \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_i r^*} \arrow[r, "\alpha^{s_i}"] \arrow[d, "1_{P_{q_i r^*}}"] & P_i \arrow[d, "\alpha^{j-i}"] \\
P_0 \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{2r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & \dots \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_i r^*} \arrow[r, "\alpha^{s_j}"] & P_j
\end{tikzcd}$$

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,2}$*:* Neste caso $i < j$, $q_j = q_i + 1$ e $s_i < s_j$, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo.

Poset S_Λ

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,2}$*:* Neste caso $i < j$, $q_j = q_i + 1$ e $s_i < s_j$, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo. Note que $j - i = r^* + s_j - s_i > r^*$.

$$
\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_0}"] & P_{r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_{r^*}}"] & P_{2r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_{2r^*}}"] & \dots \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_i r^*} \arrow[r, "\alpha^{s_i}"] \arrow[d, "1_{P_{q_i r^*}}"] & P_i \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\alpha^{r^*-s_i}"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
P_0 \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{2r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & \dots \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_i r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_j r^*} \arrow[r, "\alpha^{s_j}"] & P_j
\end{tikzcd}
$$

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,3}$*:* Neste caso $i < j$, $q_j > q_i + 1$ e r^* não divide i, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo.

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,3}$*:* Neste caso $i < j$, $q_j > q_i + 1$ e r^* não divide i, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo. Note que, como r^* não divide i, temos $r^* - s_i > 0$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{s_i}} & P_i & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dots & \xrightarrow{0} & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle 1_{P_0}} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{P_{r^*}}} & & & & \downarrow{\scriptstyle 1_{P_{q_i r^*}}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{r^*-s_i}} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{(q_i+1)r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{(q_i+2)r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{s_j}} & P_j
\end{array}
$$

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,4}$*:* Neste caso $j < i$ e r^* divide j, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é, em particular, o morfismo projeção representado abaixo.

- *Caso* $(i,j) \in R_{\Lambda,4}$*:* Neste caso $j < i$ e r^* divide j, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é, em particular, o morfismo projeção representado abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_0}"] & P_{r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_{r^*}}"] & \dots \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_j r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "1_{P_{q_j r^*}}"] & P_{(q_j+1)r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] \arrow[d, "0"] & \dots \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_i r^*} \arrow[r, "\alpha^{s_i}"] \arrow[d, "0"] & P_i \arrow[d, "0"] \\
P_0 \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{r^*} \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & \dots \arrow[r, "\alpha^{r^*}"] & P_{q_j r^*} \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & \dots \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}
$$

Poset S_Λ

Lema

Vale a seguinte igualdade: $R_\Lambda = \bigsqcup_{i=0}^{4} R_{\Lambda,i}$.

Lema

Vale a seguinte igualdade: $R_\Lambda = \bigsqcup_{i=0}^{4} R_{\Lambda,i}$.

Lema

O conjunto Q_0 *com a relação binária* R_Λ *é um poset.*

Lema

Vale a seguinte igualdade: $R_\Lambda = \bigsqcup_{i=0}^{4} R_{\Lambda,i}$.

Lema

O conjunto Q_0 *com a relação binária* R_Λ *é um poset.*

Notação:

(1) $i \leq_\omega j \Leftrightarrow (i,j) \in R_\Lambda$ para $i,j \in Q_0$.

(2) $S_\Lambda := (Q_0, \leq_\omega)$.

Morfismo induzido

Lema

Seja $\Lambda = \frac{\Bbbk Q}{I}$ *uma álgebra de dimensão finita tal que* $\dim_{\Bbbk} e_i \Lambda e_j \leq 1$ *para quaisquer* $i, j \in Q_0$.

Morfismo induzido

Lema

Seja $\Lambda = \dfrac{\Bbbk Q}{I}$ *uma álgebra de dimensão finita tal que* $\dim_{\Bbbk} e_i \Lambda e_j \leq 1$ *para quaisquer* $i, j \in Q_0$. *Seja*

$$\begin{tikzcd} P(a) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"] & P(b) \arrow[d, "\psi"] \\ P(c) \arrow[r, "\beta"] & P(d) \end{tikzcd}$$

um diagrama de homomorfismos entre Λ*-módulos projetivos indecomponíveis, onde* $a, b, c, d \in Q_0$.

Lema

(1) *Sejam α, β e ψ morfismos para os quais existe φ tal que o diagrama acima comuta e as composições são não-nulas ($\beta\varphi = \psi\alpha \neq 0$). Então tal φ é unicamente definido por α, β e ψ.*

Morfismo induzido

Lema

(1) *Sejam α, β e ψ morfismos para os quais existe φ tal que o diagrama acima comuta e as composições são não-nulas ($\beta\varphi = \psi\alpha \neq 0$). Então tal φ é unicamente definido por α, β e ψ.*

(2) *Sejam α, β e φ morfismos para os quais existe ψ tal que o diagrama acima comuta e as composições são não-nulas ($\beta\varphi = \psi\alpha \neq 0$). Então tal ψ é unicamente definido por α, β e φ.*

Mostramos o seguinte resultado

Mostramos o seguinte resultado

Teorema

A álgebra de endomorfismos $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda)$ *é isomorfa à álgebra de incidência de poset* $\Bbbk S_\Lambda$*. Além disso,* Λ *é derivadamente equivalente a* $\Bbbk S_\Lambda^{op}$*.*

Seja $\psi = (\psi^k)_{k\in\mathbb{Z}} : T_i \to T_j$.

Seja $\psi = (\psi^k)_{k \in \mathbb{Z}} : T_i \to T_j$.
$\psi^0 \in End_\Lambda(P_0) \Rightarrow \psi^0 = \lambda.1_{P_0}$ para algum $\lambda \in \mathbb{k}$.

Seja $\psi = (\psi^k)_{k\in\mathbb{Z}} : T_i \to T_j$.
$\psi^0 \in End_\Lambda(P_0) \Rightarrow \psi^0 = \lambda.1_{P_0}$ para algum $\lambda \in \mathbb{k}$.
Segue do item (2) do lema anterior que ψ é unicamente definido por ψ^0.

Seja $\psi = (\psi^k)_{k\in\mathbb{Z}} : T_i \to T_j$.
$\psi^0 \in End_\Lambda(P_0) \Rightarrow \psi^0 = \lambda.1_{P_0}$ para algum $\lambda \in \mathbb{k}$.
Segue do item (2) do lema anterior que ψ é unicamente definido por ψ^0.
Por isso qualquer morfismo entre T_i e T_j é induzido por ψ^0, logo é um múltiplo do morfismo $\varphi_{i,j}$.

Seja $\psi = (\psi^k)_{k\in\mathbb{Z}} : T_i \to T_j$.
$\psi^0 \in End_\Lambda(P_0) \Rightarrow \psi^0 = \lambda.1_{P_0}$ para algum $\lambda \in \Bbbk$.
Segue do item (2) do lema anterior que ψ é unicamente definido por ψ^0.
Por isso qualquer morfismo entre T_i e T_j é induzido por ψ^0, logo é um múltiplo do morfismo $\varphi_{i,j}$.
Portanto, o conjunto $\{\varphi_{i,j}\}_{(i,j)\in R}$ é uma $\Bbbk$-base de $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda)$.

Seja $\psi = (\psi^k)_{k\in\mathbb{Z}} : T_i \to T_j$.
$\psi^0 \in End_\Lambda(P_0) \Rightarrow \psi^0 = \lambda.1_{P_0}$ para algum $\lambda \in \mathbb{k}$.
Segue do item (2) do lema anterior que ψ é unicamente definido por ψ^0.
Por isso qualquer morfismo entre T_i e T_j é induzido por ψ^0, logo é um múltiplo do morfismo $\varphi_{i,j}$.
Portanto, o conjunto $\{\varphi_{i,j}\}_{(i,j)\in R}$ é uma $\mathbb{k}$-base de $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda)$.
Logo, $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda)$ é isomorfa à álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$.

Álgebras de Nakayama sem ciclos truncadas

Teorema de Rickard [Rickard1989]

Teorema de Rickard [Rickard1989]

Teorema

Γ, Λ - $\mathbb{k}$-*álgebras*

$D^b(\Gamma) \simeq_{tr} D^b(\Lambda) \Longleftrightarrow \Gamma \simeq End(T)^{op}$
onde $T \in \mathcal{K}^b(proj\ \Lambda)$ *é um complexo inclinante.*

Definição

Para $l, m, n, s \in \mathbb{N}$ *tais que* $m \leq l$ *e* $s < l$,

Definição

Para $l, m, n, s \in \mathbb{N}$ *tais que* $m \leq l$ *e* $s < l$, *vamos denotar por* $V(l, m, n, s)$ *o poset definido no conjunto de elementos*

$$\{a_i, b_j, c_k \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n\}$$

e com ordem parcial definida pelas seguintes regras:

Definição

Para $l, m, n, s \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq l$ e $s < l$, vamos denotar por $V(l, m, n, s)$ o poset definido no conjunto de elementos

$$\{a_i, b_j, c_k \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n\}$$

e com ordem parcial definida pelas seguintes regras:

(1) *$x_i \leq x_j$ se, e somente se, $i \leq j$ para $x \in \{a, b, c\}$;*

Definição

Para $l, m, n, s \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq l$ e $s < l$, vamos denotar por $V(l, m, n, s)$ o poset definido no conjunto de elementos

$$\{a_i, b_j, c_k \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n\}$$

e com ordem parcial definida pelas seguintes regras:

(1) $x_i \leq x_j$ *se, e somente se,* $i \leq j$ *para* $x \in \{a, b, c\}$;

(2) $a_i < c_j$ *e* $b_k < c_j$ *para todos* i, j, k;

Definição

Para $l, m, n, s \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq l$ e $s < l$, vamos denotar por $V(l, m, n, s)$ o poset definido no conjunto de elementos

$$\{a_i, b_j, c_k \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n\}$$

e com ordem parcial definida pelas seguintes regras:

(1) $x_i \leq x_j$ *se, e somente se,* $i \leq j$ *para* $x \in \{a, b, c\}$;

(2) $a_i < c_j$ *e* $b_k < c_j$ *para todos* i, j, k;

(3) $a_i < b_{i+k}$ *para todos* i *e todos* $k \geq 1$;

Definição

Para $l, m, n, s \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq l$ e $s < l$, vamos denotar por $V(l, m, n, s)$ o poset definido no conjunto de elementos

$$\{a_i, b_j, c_k \mid 1 \leq i \leq l,\ 1 \leq j \leq m,\ 1 \leq k \leq n\}$$

e com ordem parcial definida pelas seguintes regras:

(1) $x_i \leq x_j$ *se, e somente se,* $i \leq j$ *para* $x \in \{a, b, c\}$;

(2) $a_i < c_j$ *e* $b_k < c_j$ *para todos* i, j, k;

(3) $a_i < b_{i+k}$ *para todos* i *e todos* $k \geq 1$;

(4) $b_i < a_{i+t}$ *para todos* i *e todos* $t \geq s$.

Exemplo

Exemplo

O poset $V(5,3,2,3)$ *tem o seguinte diagrama de Hasse:*

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r] \arrow[ddr] & a_2 \arrow[r] \arrow[ddr] & a_3 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_5 \arrow[dr] & & \\
& & & & & c_1 \arrow[r] & c_2 \\
b_1 \arrow[r] \arrow[uurrr] & b_2 \arrow[r] \arrow[uurrr] & b_3 \arrow[urrr] & & & &
\end{tikzcd}
$$

Vamos definir os seguintes subconjuntos de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, o conjunto dos vértices de $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$.

Descrição de S_Λ

Vamos definir os seguintes subconjuntos de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, o conjunto dos vértices de $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &:= \{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid r^* \text{ divide } i\}, \\
\mathcal{A} &:= \{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid q_i \text{ é par e } i \notin \mathcal{C}\}, \\
\mathcal{B} &:= \{i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \mid q_i \text{ é ímpar e } i \notin \mathcal{C}\}.
\end{aligned}$$

Sejam $l_\Lambda(\mathcal{A}) := |\mathcal{A}|$,

Descrição de S_Λ

Sejam $l_\Lambda(\mathcal{A}) := |\mathcal{A}|$, $l_\Lambda(\mathcal{B}) := |\mathcal{B}|$

Sejam $l_\Lambda(\mathcal{A}) := |\mathcal{A}|$, $l_\Lambda(\mathcal{B}) := |\mathcal{B}|$ e $l_\Lambda(\mathcal{C}) := |\mathcal{C}|$.

Sejam $l_\Lambda(\mathcal{A}) := |\mathcal{A}|$, $l_\Lambda(\mathcal{B}) := |\mathcal{B}|$ e $l_\Lambda(\mathcal{C}) := |\mathcal{C}|$.
Se considerarmos a ordem natural existente em $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, temos as seguintes bijeções que respeitam a ordem natural em $\mathbb{Z}$ para $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$:

Descrição de S_Λ

Sejam $l_\Lambda(\mathcal{A}) := |\mathcal{A}|$, $l_\Lambda(\mathcal{B}) := |\mathcal{B}|$ e $l_\Lambda(\mathcal{C}) := |\mathcal{C}|$.
Se considerarmos a ordem natural existente em $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, temos as seguintes bijeções que respeitam a ordem natural em $\mathbb{Z}$ para $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \longleftrightarrow & \{a_1, a_2, \ldots, a_{l_\Lambda(\mathcal{A})}\}, \\ \mathcal{B} & \longleftrightarrow & \{b_1, b_2, \ldots, b_{l_\Lambda(\mathcal{B})}\}, \\ \mathcal{C}^{op} & \longleftrightarrow & \{c_1, c_2, \ldots, c_{l_\Lambda(\mathcal{C})}\}. \end{array}$$

Teorema

Seja $\Lambda = \Lambda(n, r)$ uma álgebra de Nakayama truncada e T_Λ o complexo inclinante definido acima. Então $\Bbbk S_\Lambda \simeq \Bbbk V(I_\Lambda(\mathcal{A}), I_\Lambda(\mathcal{B}), I_\Lambda(\mathcal{C}), r^*)$.

Descrição de S_Λ - Exemplo

$\Lambda = \Lambda(12, 3)$:

Descrição de S_Λ - Exemplo

$\Lambda = \Lambda(12,3)$:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8 \leftarrow 9 \leftarrow 10 \leftarrow 11$$

Descrição de S_Λ - Exemplo

$\Lambda = \Lambda(12, 3)$:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8 \leftarrow 9 \leftarrow 10 \leftarrow 11$$

S_Λ^{op} tem o seguinte diagrama de Hasse:

Descrição de S_Λ - Exemplo

$\Lambda = \Lambda(12, 3)$:

$$0 \leftarrow 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \leftarrow 4 \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow 8 \leftarrow 9 \leftarrow 10 \leftarrow 11$$

S_Λ^{op} tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
1 & 5 \arrow[l] & 9 \arrow[l] \arrow[ddll] & & & & & & \\
& & & 10 \arrow[ul] \arrow[dl] & 8 \arrow[l] & 6 \arrow[l] & 4 \arrow[l] & 2 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
3 & 7 \arrow[l] \arrow[uul] & 11 \arrow[l] \arrow[uul] & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Seja Λ uma álgebra serial à direita truncada e a_0 o vértice que corresponde ao seu único poço.

Seja Λ uma álgebra serial à direita truncada e a_0 o vértice que corresponde ao seu único poço.

Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ o conjunto de todas as fontes de Q.

Seja Λ uma álgebra serial à direita truncada e a_0 o vértice que corresponde ao seu único poço.

Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ o conjunto de todas as fontes de Q.

Vamos denotar por Λ_{b_i} a álgebra r-truncada com carcás $Q(b_i)$ que corresponde ao poset U_{b_i}

Seja Λ uma álgebra serial à direita truncada e a_0 o vértice que corresponde ao seu único poço.

Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ o conjunto de todas as fontes de Q.

Vamos denotar por Λ_{b_i} a álgebra r-truncada com carcás $Q(b_i)$ que corresponde ao poset U_{b_i} , onde $U_{b_i} = \{a \in Q_0 \mid a \geq b_i\}$.

Seja Λ uma álgebra serial à direita truncada e a_0 o vértice que corresponde ao seu único poço.

Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ o conjunto de todas as fontes de Q.

Vamos denotar por Λ_{b_i} a álgebra r-truncada com carcás $Q(b_i)$ que corresponde ao poset U_{b_i} , onde $U_{b_i} = \{a \in Q_0 \mid a \geq b_i\}$.

Λ_{b_i} é uma álgebra de Nakayama r-truncada.

Álgebras seriais à direita sem ciclos truncadas

Seja Λ uma álgebra serial à direita truncada e a_0 o vértice que corresponde ao seu único poço.

Seja $\{b_1, \ldots, b_m\}$ o conjunto de todas as fontes de Q.

Vamos denotar por Λ_{b_i} a álgebra r-truncada com carcás $Q(b_i)$ que corresponde ao poset U_{b_i} , onde $U_{b_i} = \{a \in Q_0 \mid a \geq b_i\}$.

Λ_{b_i} é uma álgebra de Nakayama r-truncada.

Construímos para cada i a relação $R_{\Lambda_i} \subseteq Q(b_i) \times Q(b_i) \subseteq Q_0 \times Q_0$.

Defina agora

$$R_\Lambda := \bigcup_{i=1}^{m} R_{\Lambda_i}.$$

Defina agora

$$R_\Lambda := \bigcup_{i=1}^{m} R_{\Lambda_i}.$$

Lema

O conjunto Q_0 com a relação binária R_Λ é um poset.

Defina agora

$$R_\Lambda := \bigcup_{i=1}^{m} R_{\Lambda_i}.$$

Lema

O conjunto Q_0 com a relação binária R_Λ é um poset.

Teorema

A álgebra de endomorfismos $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda)$ é isomorfa à álgebra de incidência de poset $\Bbbk S_\Lambda^{op}$. Além disso, Λ é derivadamente equivalente a $\Bbbk S_\Lambda^{op}$.

Vantagens:

Álgebras de incidência de posets

Vantagens:

- Objetos mais combinatórios

Álgebras de incidência de posets

Vantagens:

- Objetos mais combinatórios
- Várias equivalências dentro desta classe:

Álgebras de incidência de posets

Vantagens:

- Objetos mais combinatórios
- Várias equivalências dentro desta classe:
  - Mutações [Lad2010]

Álgebras de incidência de posets

Vantagens:

- Objetos mais combinatórios
- Várias equivalências dentro desta classe:
  - Mutações [Lad2010]
  - Mutações generalizadas

Vantagens:

- Objetos mais combinatórios
- Várias equivalências dentro desta classe:
  - Mutações [Lad2010]
  - Mutações generalizadas
  - Equivalência de Ladkani [Lad2008,B]

Álgebras seriais à direita sem ciclos truncadas hereditárias por partes

Teorema de Happel:

Teorema de Happel:

Se $\mathcal{H}$ é uma $\mathbb{k}$-categoria hereditária, abeliana, conexa, com espaços de morfismos e extensões de dimensão finita, e com algum objeto inclinante

Teorema de Happel:

Se $\mathcal{H}$ é uma $\mathbb{k}$-categoria hereditária, abeliana, conexa, com espaços de morfismos e extensões de dimensão finita, e com algum objeto inclinante

$$\Downarrow$$

$\mathcal{H} \simeq_{der} mod\ H$ para alguma $\mathbb{k}$-álgebra hereditária de dimensão finita H

Teorema de Happel:

Se $\mathcal{H}$ é uma $\Bbbk$-categoria hereditária, abeliana, conexa, com espaços de morfismos e extensões de dimensão finita, e com algum objeto inclinante

$$\Downarrow$$

$\mathcal{H} \simeq_{der} mod\ H$ para alguma $\Bbbk$-álgebra hereditária de dimensão finita H

ou

$\mathcal{H} \simeq_{der} coh\ \mathbb{X}$ para alguma reta projetiva com pesos $\mathbb{X}$

Álgebras seriais à direita sem ciclos truncadas hereditárias por partes

Geigle e Lenzing ([GL 1987])

Álgebras seriais à direita sem ciclos truncadas hereditárias por partes

Geigle e Lenzing ([GL 1987])

$$D^b(coh\, \mathbb{X}(p,\lambda)) \simeq_{tr} D^b(mod\ \ C(p,\lambda))$$

Geigle e Lenzing ([GL 1987])

$$D^b(coh\, \mathbb{X}(p,\lambda)) \simeq_{tr} D^b(mod\ C(p,\lambda))$$

Ladkani, em [Lad2008] mostrou o seguinte resultado.

Geigle e Lenzing ([GL 1987])

$$D^b(coh\ \mathbb{X}(p,\lambda)) \simeq_{tr} D^b(mod\ \ C(p,\lambda))$$

Ladkani, em [Lad2008] mostrou o seguinte resultado.

Teorema

Seja Λ uma álgebra canônica do tipo (p,λ) sobre um corpo algebricamente fechado. Então Λ é derivadamente equivalente a uma álgebra de incidência de poset se e somente se o número de pesos de p é igual a 2 ou 3.

Referências bibliográficas

[ASS] Assem, Ibrahim and Simson, Daniel and Skowroński, Andrzej - *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1* Cambridge University Press (2006).

[DrozdKirichenko] Drozd, Yurij A. and Kirichenko, Vladimir V. *Finite Dimensional Algebras*. Springer-Verlag (1994).

[GL1987] Geigle, W.; Lenzing, H. - *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*. In: Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1273, Springer, Berlin, pp. 265-297, (1987).

[Hap1988] Happel, Dieter. *Triangulated Categories in the representation theory of finite dimensional algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series 119 (1988).

[Lad2008,B] Ladkani, Sefi. *On derived equivalences of categories of sheaves over finite posets*. J. Pure Appl. Algebra (2008).

[Lad2010] Ladkani, Sefi. *Perverse equivalences, BB-tilting, mutations and applications*. arXiv:1001.4765 (2010).

[Lad2008] Ladkani, Sefi. *Which canonical algebras are derived equivalent to incidence algebras of posets?*. Comm. Algebra (2008).

[Rickard1989] Rickard, Jeremy. *Morita theory for derived categories*. J. London Mathematical Society (2) 39(3), 436-456 (1989).

Obrigado !