Feixes Instanton e Representações de Aljavas

Danilo Dias da Silva

Universidade Federal de Sergipe

Congresso de Jovens Pesquisadores em Matemática

11 de dezembro de 2018

1. Feixes instanton e mônadas lineares
2. Mônadas lineares e aljavas
3. Espaços de módulos de Representações
4. Resultados: Compactificações de fibrados instanton de carga 1

Feixes instanton em $\mathbb{P}^3$

Definição (2005)

Um feixe instanton em $\mathbb{P}^3$ é um feixe livre de torção E sobre $\mathbb{P}^3$ de posto 2, com classes de Chern $c_1(E) = c_3(E) = 0$ e que satisfazem

$$h^0(E(-1)) = h^1(E(-2)) = h^2(E(-2)) = h^3(E(-3)) = 0.$$

A carga de E é dada por sua segunda classe de Chern $c_2(E) = n$.

1. Se o feixe instanton é localmente livre dizemos que trata-se de um fibrado instanton, generalização da versão holomorfa de um instanton como comumente conhecido na Teoria de Gauge.
2. Através do uso de sequência espectral de Beilinson pode-se provar que que estes feixes são precisamente os que surgem como cohomologia de mônadas lineares da forma

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 2n+2} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^n \to 0$$

Feixes instanton em $\mathbb{P}^3$

1. Mais que a correspondência anterior, pode-se provar que a subcategoria dos feixes instanton em $\mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$ é equivalente a subcategoria das mônadas lineares vista dentro da categoria de complexos de feixes coerentes.
2. As mônadas lineares por sua vez estarão associadas a representações de aljavas pelas características lineares dos morfismos entre os objetos que formam as mônadas.
3. Recentemente, Jardim, Prata e da Silva (2010, 2012) obtiveram equivalências entre subcategorias da categoria das mônadas lineares que já eram equivalentes a subcategorias de feixes importantes (entre eles os feixes instanton) e subcategorias da categoria de representações de uma dada aljava.

Aljavas e Representações

- Uma aljava Q é dada por um conjunto finito de vértices Q_0, um conjunto finito de flechas Q_1 e dois mapas $h, t : Q_1 \to Q_0$ que atribuem a uma flecha os vértices de término e início, respectivamente.
- Uma representação $\mathbb{C}$-linear de uma aljava á dada por $R = (\{V_i\}_{i \in Q_0}; \{f_\alpha\}_{\alpha \in Q_1})$ onde V_i é um $\mathbb{C}$-espaço e $f_\alpha : V_{t(\alpha)} \to V_{h(\alpha)}$ é linear.
- Um morfismo entre duas representações R and R' é dado por $\phi = \{\phi_i\}_{i \in Q_0}$ onde $\phi_i : V_i \to V_i'$ is linear e para toda flecha α nós temos $f'_\alpha \phi_{t(\alpha)} = \phi_{h(\alpha)} f_\alpha$.
- A partir da aljava Q obtemos uma $\mathbb{C}$-algebra associativa $\mathbb{C}Q$ tomando os caminhos como base e o produto de caminhos como sendo a concatenação (se não for possível concatenar o produto é zero).
- Podemos quocientar essa álgebra por ideais gerados por relações, i.e., somas de caminhos de comprimento 2 de mesmo início e final.

Exemplos

- A uma aljava cuja álgebra é quocientada por um ideal gerado por relações dizemos chamamos aljava com relações.
- Exemplo de aljava com relações:

$$Q: \quad \begin{array}{ccccc} & -\eta_1 \to & & -\phi_1 \to & \\ \overset{1}{\circ} & -\eta_2 \to & \overset{2}{\circ} & -\phi_2 \to & \overset{3}{\circ} \\ & -\eta_3 \to & & -\phi_3 \to & \\ & -\eta_4 \to & & -\phi_4 \to & \end{array}$$

  com relações $\phi_i \eta_j + \phi_j \eta_i = 0$ for $1 \leq i \leq j \leq 4$

- Exemplo de uma representação de Q de vetor dimensão $(1, 4, 1)$:

$$R: \quad \begin{array}{ccccc} & -u_1 \to & & -v_1 \to & \\ \mathbb{C} & -u_2 \to & \mathbb{C}^4 & -v_2 \to & \mathbb{C} \\ & -u_3 \to & & -v_3 \to & \\ & -u_4 \to & & -v_4 \to & \end{array}$$

  tal que $v_i u_j + v_j u_i = 0$ para $1 \leq i \leq j \leq 4$

Mônadas lineares e representações de aljavas

- Começamos fixando coordenadas homogêneas $[x : y : z : w]$ em $\mathbb{P}^3$. Então os morfismos α e β na mônada linear

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 4} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to 0$$

  podem ser representados por matrizes com entradas que são formas lineares nas variáveis x, y, z, w.
- Pensando em $\{x, y, z, w\}$ como base do espaço vetorial das formas lineares temos
  $\beta = v_1 \otimes x + v_2 \otimes y + v_3 \otimes z + v_4 \otimes w, \alpha = u_1 \otimes x + u_2 \otimes y + u_3 \otimes z + u_4 \otimes w$
  onde v_1, v_2, v_3, v_4 são matrizes 4×1 com entradas em $\mathbb{C}$ e u_1, u_2, u_3, u_4 são matrizes 1×4 com entradas em $\mathbb{C}$.
- Associada a uma mônada linear do tipo acima existe então uma representação R

$$R: \quad \mathbb{C} \begin{array}{c} -u_1 \to \\ -u_2 \to \\ -u_3 \to \\ -u_4 \to \end{array} \mathbb{C}^4 \begin{array}{c} -v_1 \to \\ -v_2 \to \\ -v_3 \to \\ -v_4 \to \end{array} \mathbb{C}$$

- A identidade $\beta \circ \alpha = 0$ implica que as relações $v_j u_i + v_i u_j = 0$ para todo $1 \leq i \leq j \leq 4$ devem ser satisfeitas..
- O fato que β é sobrejetor implica que R deve ser globalmente sobrejetiva, ou seja, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é base de $\mathbb{C}^4$.
- Jardim e da Silva demonstraram o seguinte:
  - A mônada anterior possui como cohomologia um instanton localmente livre sse R é globalmente injetiva, ou seja, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é base de $\mathbb{C}^4$.
  - Existe um funtor equivalência que preserva somas diretas entre a subcategoria dos feixes instanton localmente livres e a subcategoria de representações da aljava

$$Q: \quad \overset{1}{\circ} \begin{array}{c} -\eta_1\rightarrow \\ -\eta_2\rightarrow \\ -\eta_3\rightarrow \\ -\eta_4\rightarrow \end{array} \overset{2}{\circ} \begin{array}{c} -\phi_1\rightarrow \\ -\phi_2\rightarrow \\ -\phi_3\rightarrow \\ -\phi_4\rightarrow \end{array} \overset{3}{\circ}$$

    com relações $\phi_i \eta_j + \phi_j \eta_i = 0$ para $1 \leq i \leq j \leq 4$, que possuem vetor dimensão $(1, 4, 1)$ e que são globalmente injetivas e sobrejetivas.

Espaço de Módulos (Moduli Space)

- Trata-se de um objeto geométrico cujos pontos parametrizam objetos algébrico-geométricos de um tipo fixado e que se deseja classificar (mais usualmente classes de isomorfismos desses objetos).
- Como exemplo podemos citar espaços de módulos de feixes sem torção sobre uma variedade projetiva com polinômio de Hilbert fixado e os espaços de módulos de representações de uma determinada aljava com vetor dimensão fixado.
- Uma das principais ferramentas para a construção de espaços de módulos em geometria algébrica e em representações de aljavas é a Teoria Geométrica Invariante (TGI) de Mumford.

Contrução TGI, caso afim

- A construção mais simples de um quociente TGI é o de um grupo reduzido G agindo linearmente em uma variedade afim $X = \mathrm{Spec} R$.
- Se R^G é o anel de invariantes é natural definirmos a variedade afim $X//G := \mathrm{Spec} R^G$.
- Então a projeção G-invariante $\pi : X \to X//G$ faz de $X//G$ um quociente categórico de X.
- Usualmente $X//G$ não é um quociente geométrico, ou seja, não há bijeção entre órbitas e pontos de $X//G$. Entretanto há uma bijeção entre órbitas fechadas e pontos de $X//G$.

Construção TGI para representações (A. King)

Dada uma aljava Q, fixemos um vetor dimensão d e k-espaços vetoriais M_i de dimensão d_i para todo $i \in Q_0$. Considere o k-espaço afim

$$R_d = R_d(Q) = \oplus_{\alpha:i\to j}\mathrm{Hom}(M_i, M_j)$$

.

Seus pontos $M = (M_\alpha)_\alpha$ parametrizam representações de Q nos espaços vetoriais M_i.

O grupo linear reduzido $G = \prod_{i\in Q_0}\mathrm{GL}(M_i)$ age em R_d por mudança de base:

$$(g_i)_i \cdot (M_\alpha)_\alpha = (g_j M_\alpha g_i^{-1})_{\alpha:i\to j}$$

As órbitas $G\cdot M$ em R_d correspondem biunivocamente às classes de isomorfismos $[M]$ de representações de Q de vetor dimensão d.

Construção TGI para representações (A. King)

- Se aplicamos a construção TGI para a variedade afim R_d obtemos $R_d//G = \{pt\}$, ou seja, a única órbita fechada parametrizada neste caso será a da representação semissimples M de vetor dimensão d.
- Objetivo: encontrar um subconjunto $U \subset R_d$, uma variedade algébrica X e um morfismo $\pi : U \to X$ tais que as fibras de π são precisamente as órbitas de G em U.

Construção TGI para representações (A. King)

- A solução encontra-se em uma versão relativa da construção TGI no caso afim.
- Escolhamos um character de G, i.e., um morfismo de grupos algébricos $\chi : G \to k^*$. Para cada character χ teremos um espaço de módulos associado.
- Como todo character $\chi : G \to k^*$ é da forma $(g_i)_i \mapsto \prod_{i \in Q_0} \det(g_i)^{m_i}$ podemos associar a cada character χ um único vetor $\theta = (m_i)_{i \in Q_0}$ em $\mathbb{R}^3$.
- Fixado um parâmetro $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$ definimos a inclinação de uma representação R de vetor dimensão (a, b, c) por

$$\mu(R) = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$$

- Dizemos que uma representação R é θ-semiestável se para toda subrepresentação S de R temos $\mu(S) \leq \mu(R)$.

Construção TGI para representações (A. King)

- Se denotamos $R_d^{\theta-\mathrm{sst}}$ o conjunto de representações θ-semiestáveis em R_d então King demonstrou que existe quociente categórico $\pi : R_d^{\theta-\mathrm{sst}} \to R_\theta(d)$, onde $R_\theta(d)$ é o espaço de módulo de representações θ-semiestáveis de vetor dimensão d.
- Dizemos que uma representação R é θ-estável se para toda subrepresentação S de R temos $\mu(S) < \mu(R)$.
- Se denotamos $R_d^{\theta-\mathrm{st}}$ o conjunto de representações θ-estáveis então π restrito a $R_d^{\theta-\mathrm{st}}$ é um quociente geométrico.

Instantons de carga c=1

- Objetivo: Encontrar uma nova compactificação para o espaço de módulos de fibrados instanton de carga $c = 1$ denotado $I(1)$ utilizando os espaços de módulos de representações de King.
- Sabemos que os fibrados em $I(1)$ estão associados às representações globalmente injetivas e globalmente sobrejetivas da aljava

$$Q: \quad \overset{1}{\circ} \begin{array}{c} -\eta_1\to \\ -\eta_2\to \\ -\eta_3\to \\ -\eta_4\to \end{array} \overset{2}{\circ} \begin{array}{c} -\phi_1\to \\ -\phi_2\to \\ -\phi_3\to \\ -\phi_4\to \end{array} \overset{3}{\circ}$$

com relações $\phi_i\eta_j + \phi_j\eta_i = 0$ for $1 \leq i \leq j \leq n$ e vetor dimensão $(1, 4, 1)$.

- Gostaríamos de determinar para quais valores de θ teremos $I(1) \subset R_\theta(1, 4, 1)$ e determinar quem são os pontos no fecho de $I(1)$ em $R_\theta(1, 4, 1)$.

Instantons de carga c=1

- Apesar do vetor $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ ser tridimensional através da relação $\theta \cdot (1,4,1) = 0$ podemos falar de (α, γ)-estabilidade.
- Recentemente, Jardim e Silva encontraram os seguintes resultados:
    - Para valores de $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ fora do quarto quadrante $R_\theta(1,4,1)$ é vazio.
    - Para valores de (α, γ) no quarto quadrante tais que $\gamma < -\alpha$, $R_\theta(1,4,1)$ é formado exatamente pelas representações globalmente sobrejetivas.
    - Para valores de (α, γ) no quarto quadrante tais que $\gamma > -\alpha$, $R_\theta(1,4,1)$ é formado exatamente pelas representações globalmente injetivas.
    - Temos $I(1) \subset R_\theta(1,4,1)$ para valores de (α, γ) no quarto quadrante. Essas variedades projetivas $R_\theta(1,4,1)$ são candidatas a compactificações de $I(1)$.

Instantons de carga c=1

- Para valores de (α, γ) no quarto quadrante tais que $\gamma < -\alpha$, $R_\theta(1,4,1) \simeq \mathbb{P}^5$ e as representações globalmente sobrejetivas que não estão no aberto $I(1)$ representam os feixes instanton que não são localmente livres de carga 1 e são parametrizados por uma quádrica em $\mathbb{P}^5$.
- Para valores de (α, γ) no quarto quadrante tais que $\gamma > -\alpha$, $R_\theta(1,4,1) \simeq \mathbb{P}^5$ e as representações globalmente injetivas que não estão no aberto $I(1)$ representam os feixes perversos duais dos feixes instanton do item anterior e são parametrizados por uma quádrica em $\mathbb{P}^5$.

M. Jardim, *Instanton sheaves on complex projective spaces.* Collectanea Mathematica **57(1)** (2005), 69-97.

M. Jardim, D. Prata, *Representation of quivers on abelian varieties and monads on projective spaces.* So Paulo J. Math. Sci. **4** (2010), 399-423.

M. Jardim, V. M. F. da Silva, *Decomposability criterion for linear sheaves.* Central European Journal of Mathematics **10(4)** (2012).

A. King, *Moduli of representations of finite dimensional algebras.* Quart. J. Math. Oxford, **45** (1994), 515–530.

O. Okonek, M. Schneider, H. Splinder, *Vector bundles on complex projective spaces.* Boston: Birkhauser (1980).

O. Okonek, M. Schneider, *Mathematical instanton bundles on* $\mathbb{P}^{2n+1}$. J. Reine Agnew. Math. **364** (1986), 35-50.