

### Lista 3 de Exercícios

Prazo para entrega: veja no sistema panda

1. Esta lista é para ser feita *individualmente*.
2. Entregar um *único arquivo* .M (M-file) em disquete, com todos os comandos para as soluções; lembre-se que tal arquivo pode ser editado na janela de edição do MatLab, que pode ser aberta pelo comando `edit` no `workspace`.

Routo Terada (rt@ime.usp.br)

Explicamos a seguir um modelo de investimentos chamado Pêndulo de Schumpeter.

Um *Investimento*  $I(t)$  ao longo do tempo  $t$  foi modelado por J. A. Schumpeter em 1961 (Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen) como constituído de dois componentes: um *expansivo*,  $E(t)$ , e outro *racional*,  $R(t)$ :

$$I(t) = E(t) + R(t) \begin{cases} E() \text{ expansivo} \\ R() \text{ racional} \end{cases} \quad (0.1)$$

O *índice de investimento* é definido por:

$$Z(t) = \frac{E(t) - R(t)}{I(t)} = Z_0 + z(t), \text{ onde } Z_0 \text{ é constante} \quad (0.2)$$

Seja  $n_E(t)$  o número de investidores do tipo  $E$ . E seja  $n_R(t)$  o número de investidores do tipo  $R$ .

O *número total de investidores*  $N$  é uma constante definida por:

$$2 * N = n_E(t) + n_R(t) \quad (0.3)$$

A *configuração de investidores*  $n(t)$  é:

$$n(t) = \frac{n_E(t) - n_R(t)}{2} \implies \begin{cases} n_E(t) = N + n(t) \\ n_R(t) = N - n(t) \end{cases} \quad (0.4)$$

A probabilidade transiente  $w_{ER}(t)$  é a probabilidade de mudança na opinião do investidor do grupo  $R$  para grupo  $E$ . Analogamente define-se  $w_{RE}(t)$ .

A equação de equilíbrio da distribuição de investidores é definida por:

$$\frac{dn(t)}{dt} = n_R * w_{RE} - n_E * w_{ER} \quad (0.5)$$

Seja a variável normalizada  $x(t) = \frac{n(t)}{N}$ . E então:

$$\frac{dx(t)}{dt} = w_{RE} * [1 - x(t)] - w_{ER} * [1 + x(t)] \quad (0.6)$$

Seja  $p(t)$  o *alternador de opinião* do investidor que provoca a sua mudança de um tipo de investimento para outro.

Um valor positivo de  $p(t)$  exprime mudança do tipo  $R$  para o tipo  $E$ . Caso contrário, do tipo  $E$  para o tipo  $R$ .

alternador $p(t)$	mudança
$p(t) > 0$	$R \rightarrow E$
$p(t) < 0$	$E \rightarrow R$

Seja  $q$  o *coordenador* que representa a intensidade de sincronização do investidor com esforços de outros investidores. E então, sendo  $A$  um fator de escala de tempo, tem-se:

$$\begin{aligned} w_{ER} &= Ae^{p(t)+qx(t)} \\ w_{RE} &= Ae^{-[p(t)+qx(t)]} \end{aligned} \quad (0.7)$$

Substituindo 0.7 em 0.6 tem-se:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{p(t)+qx(t)} * [1 - x(t)] - Ae^{-[p(t)+qx(t)]} * [1 + x(t)] \quad (0.8)$$

$$\begin{aligned} &= A * e^{p(t)+qx(t)} - A * x(t) * e^{p(t)+qx(t)} - A * e^{-[p(t)+qx(t)]} - A * x(t) * e^{-[p(t)+qx(t)]} \\ &= A * e^{p(t)} e^{qx(t)} - A * x(t) * e^{p(t)} e^{qx(t)} - A * e^{-[p(t)]} e^{-[qx(t)]} - A * x(t) * e^{-[p(t)]} e^{-[qx(t)]} \\ &= 2A * \frac{e^{p(t)} e^{qx(t)} - e^{-[p(t)]} e^{-[qx(t)]}}{2} - 2A * x(t) \frac{e^{p(t)} e^{qx(t)} + e^{-[p(t)]} e^{-[qx(t)]}}{2} \\ &= 2A[\sinh(p(t) + qx(t)) - x(t)[\cosh(p(t) + qx(t))]] \end{aligned} \quad (0.9)$$

As oscilações de investimentos são causadas pela variabilidade no tempo do alternador  $p(t)$ . G. Mensch et al. (*Econometrics* vol. 50, 1982, p. 15) deduziram

a seguinte equação para o alternador, para constantes características  $B > 0, a > 0, p_0 > 0$ :

$$\frac{dp(t)}{dt} = -2B\{p_0 \sinh[a * x(t)] + p(t) \cosh[a * x(t)]\} \quad (0.10)$$

As equações 0.8 e 0.10 representam um modelo de evolução de investimentos. Para a Alemanha da década de 50 até 70, foram utilizados os parâmetros:

$$\begin{aligned} B &= 0.8, a = 4, p_0 = 0.5, A = 4B, q = 1.6 \\ x(0) &= 0.01, p(0) = 0 \text{ (condições iniciais)} \end{aligned}$$

Verificou-se que havia uma boa correspondência entre a realidade econômica e os resultados deste modelo, nestas décadas.

Escrever em MatLab um programa para traçar dois gráficos, para estes e outros parâmetros:

1. gráfico de  $p(t)$  em função de  $x(t)$ , e interpretar os quatro quadrantes do gráfico, isto é, escrever o que cada quadrante significa.
2. gráfico de  $x(t), p(t)$  em função de  $t$ , e interpretá-lo, isto é, escrever o que a variação de  $x(t)$  e  $p(t)$  significa..