MAT5714 - Funções Analíticas - Lista 3

11 de novembro de 2013

Exercício 1. Agradecendo ao Prof. André Gomes novamente, resolva o que restou de sua lista em `http://www.ime.usp.br/~gomes/1exr5714.pdf`

Exercício 2. Cada uma das funções f a seguir tem uma singularidade isolada em $a = 0$. Classificar esta singularidade, definir $f(0)$ de modo a tornar f analítica nos casos em que a singularidade seja removível, determinar a parte principal de f em $a = 0$ quando a singularidade seja polar e determinar $f(A[0, 0, \delta])$ para valores arbitrariamente pequenos de δ quando $a = 0$ for uma singularidade essencial:

a) $f(z) = z^{-1} \sin z$

b) $f(z) = z^{-1} \cos z$

c) $f(z) = z^{-1}(\cos z - 1)$

d) $f(z) = \exp(z^{-1})$

e) $f(z) = z^{-2}\mathrm{Log}(1 + z)$

f) $f(z) = \frac{\cos z^{-1}}{z^{-1}}$

g) $f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)}$

h) $f(z) = (1 - e^z)^{-1}$

i) $f(z) = z \sin z^{-1}$

j) $f(z) = z^n \sin z^{-1}$

k) $f(z) = z^{-n}(\cos z - 1)$

Exercício 3. Explicite os desenvolvimentos do tipo $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m z^m$ que a função $f(z) = (9 - z^2)^-1 + (5 - z)^{-1}$ admite, indicando as regiões de convergência.

Exercício 4. Dada a função $f(z) = [z(z-1)(z-2)]^{-1}$, determinar o desenvolvimento de Laurent de f em cada um dos seguintes anéis: $A[0, 0, 1]$, $A[0, 1, 2]$ e $A[0, 2, +\infty]$.

Exercício 5. Calcule as seguintes integrais:

a) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{(z-2)(z-1)}\, dz$

b) $\int_{|z|=7} \frac{e^z}{e^z-1}\ dz$

c) $\int_{|z|=4} \text{tg} z\ dz$

d) $\int_{|z|=4} \text{cotg} z\ dz$

e) $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{3z^2-6z+2}{z^3-3z^2+2z}\ dz$

Exercício 6. Calcule

$$\int_{|z|=1} \frac{4z^7-10z^4+z}{z^8-4z^5+z^2-1}\ dz\,.$$

Sugestão: teorema de "contagem de zeros"+ Rouché.

Exercício 7. Determinar condições suficientes sobre $a>0$ de tal modo que a equação $z^7-5z^3+a=0$ tenha todas as raízes na região $1<|z|<2$. Sugestão: compare o número de zeros de $f(z)=z^7-5z^3+a$ e $g(z)=z^7$ no disco $|z|<2$ obtendo uma condição sobre a. Depois compare o número de zeros de $f(z)$ com $h(z)=-5z^3+a$ no disco $|z|<1$.

Exercício 8. Determinar a forma geral das funções $f\in\mathcal{H}(S^2\setminus\{-1,\infty\})$ que verificam as duas condições seguintes: 1) f tem um polo de ordem 3 no ponto $z=-1$ com parte principal $P(z)=\frac{1}{(z+1)^3}-\frac{2}{(z+1)^2}+\frac{3}{z+1}$; e 2) f tem um polo de ordem 2 no ∞.

Exercício 9. Calcule $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(a+bx^2)^2}\ dx$, onde $a>0, b>0$.

Exercício 10. Prove que as três condições seguintes são equivalentes:

i) $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ e f é injetiva;

ii) $f(z)=a_0+a_1z$ para todo $z\in\mathbb{C}$;

iii) f é um automorfismo analítico de $\mathbb{C}$ (isto é, f é um isomorfismo analítico de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$).

Sugestão: é claro que (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (i), portanto basta provar que (i) $\implies$ (ii). Há duas etapas. Seja $f(z)=\sum_{m\geq 0}a_mz^m$ o desenvolvimento de Taylor de f em volta da origem, então temos: **Etapa 1**: o conjunto $X:=\{m\in\mathbb{N}: a_m\neq 0\}$ é finito. Para isso, suponha por absurdo que X é infinito e assim f tem uma singularidade essencial no ∞. Usar a injetividade de f e o teorema da aplicação aberta pra chegar a um absurdo. **Etapa 2**: $X=\{a_0,a_1\}$ pela primeira etapa f é um polinômio, agora basta ver que se o grau for maior (estrito) que 1, temos uma contradição a partir da injetividade de f pelas raízes da mesma.

Exercício 11. Determinar e classificar as singularidades da função $f(z)=\frac{e^z+1}{e^{\frac{1}{z}}-1}$ na esfera de Riemann.