MAT5714 - Funções Analíticas - Lista 2

25 de setembro de 2013

Exercício 1. Agradecendo ao Prof. André Gomes, resolva até o exercício 57 da lista em `http://www.ime.usp.br/~gomes/1exr5714.pdf`

Exercício 2. Seja $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

a) Mostre que $e^{2\pi i t z} + 1 \neq 0$ para cada $(t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

b) Prove que para cada $\alpha \in \mathbb{R}_+$ a função $f_\alpha : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$f_\alpha(z) := \int_0^\alpha \frac{e^{-t} dt}{e^{2\pi i t z} + 1} \quad \forall z \in \Omega$$

é analítica em Ω.

c) Prove que a função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{e^{2\pi i t z} + 1} \quad \forall z \in \Omega$$

é analítica em Ω.

Exercício 3. Sejam Ω um aberto conexo não vazio de $\mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ com f não constante. Prove que se K é um compacto contido em Ω então a função $u := \mathrm{Re}(f)$ não pode atingir seu máximo e seu mínimo em K em um ponto interior a K. Dica: considere e^f.

Exercício 4. Considere círculos orientados γ_1, γ_2 e γ_3 tais que γ_1 é positivamente orientado e γ_2 e γ_3 são negativamente orientados, estão contidos no interior de γ_1, além de que γ_2 e γ_3 são disjuntos e seus interiores também.

Sejam $\Gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, $V := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1\}$ e suponha que $0 \in V$.

a) Se Ω é um aberto conexo contendo $\overline{V}$ e $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, determine $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sabendo que

$$f(z) = \int_\Gamma \frac{g(\xi)(1 - \cos(\xi))}{\xi^2(\xi - z)} \, d\xi \quad \forall z \in V$$

b) Seja $a \in V$ tal que $a \neq 0$ e $g(a)(1 - \cos(a)) \neq 0$. Calcule

$$I := \int_\Gamma \frac{f(z) \, dz}{(z - a)^2}$$

Exercício 5. Existe ou não uma sequência de polinômios que converge uniformemente em $D_1(0)$ para $f(z) = \bar{z}$? Justifique sua resposta.

Exercício 6. Sejam Ω um aberto conexo de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $I = [a, b]$ um intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ e $\psi : I \to \mathbb{R}$ duas funções Riemann-integráveis e suponhamos que $\varphi(t) \notin f(\Omega)$ para cada $t \in I$. Prove que a função

$$F : z \in \Omega \mapsto \int_a^b \frac{\psi(t)\ dt}{\varphi(t) - f(z)} \in \mathbb{C}$$

é analítica em Ω. Como aplicação determine o maior aberto conexo de $\mathbb{C}$ no qual é analítica a função

$$F : z \in \Omega \mapsto \int_0^1 \frac{\sin(t)\ dt}{t^2 - e^z}\,.$$

Exercício 7. Determinar o maior disco aberto de centro na origem no qual $f(z) = z^2 + z$ seja injetora. Sugestão: a condição $f(\alpha) = f(\beta)$ com $\alpha \neq \beta$ implica $\alpha + \beta = -1$ e portanto $\alpha + \beta = \mathrm{Re}(\alpha) + \mathrm{Re}(\beta) = -1$, etc...

Exercício 8. Determinar o maior disco aberto Δ de centro na origem no qual $f(z) = e^z$ seja injetora. Esboce $f(\Delta)$.

Exercício 9. Sejam $w_1, \dots, w_n \in D_0 := \{z \in \mathbb{C} : z \neq -|z|\}$ tais que $w_1 w_2 \dots w_n \in D_0$ (o produto deles, se não ficou claro) e $k \in \mathbb{Z}$. Prove que existem inteiros $k_1, \dots, k_n$ tais que

$$\mathrm{Log}_k(w_1 w_2 \dots w_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Log}_{k_\nu}(w_\nu)\,.$$

Exercício 10. Sejam a e b dois números reais tais que $0 \leq a < b$ e seja $A := \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$. Prove que não existe nenhuma determinação do logaritmo em A. Sugestão: suponha por absurdo que existe uma tal determinação $g \in \mathcal{C}(A)$, $\exp(g(w)) = w\, \forall w \in A$. Use a conexidade de $g(A)$ para mostrar que existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(w) = \ln|w| + i[\mathrm{Am}(w) + 2k\pi]\, \forall w \in A$ e prove que esta função nao é contínua em nenhum ponto $x \in A$ tal que $\mathrm{Im}(w) = 0$ e $\mathrm{Re}(w) < 0$.

Exercício 11. Prove as seguintes propriedades da determinação principal da potência em D_0.

a) $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda z^\mu \quad \forall z \in D_0; \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

b) $(z^\lambda)^\mu = z^{\lambda\mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $z \in D_0$ tais que $z^\lambda \in D_0$.

c) Provar que $(z^\lambda)' = \lambda z^{\lambda-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ z \in D_0$

d) É válida a identidade $(z_1 z_2)^\lambda = z_1^\lambda z_2^\lambda$ onde z_1, z_2 e $z_1 z_2$ pertencem a D_0?

e) Calcular π^i, i^π, $(1+i)^{1-i}$ e $(-i)^{-i}$.

Exercício 12. Prove que uma função inteira que satisfaz a desigualdade $|f(z)| < |z|^n$ para algum n e $|z|$ suficientemente grande é de fato um polinômio.

Exercício 13. Se $f(z)$ é analítica para $|z| < 1$ e $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, encontre a melhor estimativa de $|f^{(n)}(0)|$ que a desigualdade de Cauchy pode dar.

Exercício 14. Mostre que as derivadas sucessivas de uma função analítica nunca podem satisfazer $|f^{(n)}(z)| > n!n^n$. Formule um teorema mais preciso deste mesmo tipo.

Exercício 15. Suponha que Ω é um aberto conexo e não vazio de $\mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para $n = 1, 2, \ldots,$ que nenhuma das funções f_n tem algum zero em Ω, e que $\{f_n\}$ converge uniformemente para f sobre os conjuntos compactos de Ω. Prove que ou f não tem zeros em Ω ou $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

Exercício 16. Suponha que *Omega* é um aberto conexo e não vazio de $\mathbb{C}$, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para $n = 1, 2, \ldots,$ e $u_n = \mathrm{Re}(f_n)$. Prove que se $\{u_n\}$ converge uniformemente sobre os compactos de Ω e $\{f_n(z)\}$ converge para ao menos um ponto $z \in \Omega$, então $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre os compactos de Ω.