MAT3120 - Cálculo III - Lista 5

2 de junho de 2012 - **entrega 14/6/2012**

Exercício 1. Calcule a massa da superfície S dada por $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - z^2 = 0$ e $0 \leq z \leq 1$, com densidade $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercício 2. Calcule

$$\iint_S x\ dy \wedge dz + y\ dz \wedge dx + z\ dx \wedge dy\,,$$

onde S é a parte da superfície $z = 4 - x^2 - y^2$ limitada pelo plano $z = y + 4$ com normal $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$.

Exercício 3. Seja S uma superfície descrita pela fórmula $z = f(x, y)$, onde (x, y) variam numa região plana fechada R, projeção de S sobre o plano xy. Sejam $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ e $\vec{n}$ a normal unitária a S tendo componente z não negativa. Verifique a seguinte igualdade

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\ ds = \iint_R \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right)\ dxdy\,.$$

Exercício 4. Seja S como no exercício anterior e considere φ um campo escalar (tão regular quanto preciso). Mostre que

$$\iint_S \varphi(x, y, z)\ dS = -\iint_R \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ dxdy\,.$$

Exercício 5. Se D é a região interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$, entre os planos $z = 0$ e $z = x + 2$, use o teorema de Gauss (do divergente) para calcular $\displaystyle\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\ dS$, sendo $S = \partial D$, $\vec{n}$ a normal exterior a D e $\vec{v} = (x^2 + ye^z, y^2 + ze^x, z^2 + xe^y)$.

Exercício 6. Calculo o fluxo de $\vec{v}$ através de S, na direção da normal $\vec{n}$ quando $\vec{v} = 3xy^2\vec{i} + (e^{x^2z^2} - y^3\vec{j} + y^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$ limitada pelo plano $z = -x + 5$, com $\vec{n}$ normal exterior.

Exercício 7. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\ dS$, sendo $\vec{v} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}}$ e S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com $\vec{n}$ a normal exterior.

Exercício 8. Use o teorema de Stokes para mostrar que $\displaystyle\int_C y\ dx + z\ dy + x\ dz = \pi a^2\sqrt{3}$, onde C é a curva de intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ com o plano $x + y + z = 0$.

Exercício 9. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\ dS$, sendo S a parte do hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$ e $\vec{v} = \text{rot}\vec{u}$, com $\vec{u} = (x^2, z, yz)$. Escolha (e explicite) uma orientação para S.

Exercício 10. Determine $\vec{v}$ tal que $\vec{u} = \text{rot}\vec{v}$ e calcule $\displaystyle\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n}\ dS$, onde $\vec{u} = (e^x \sin y, e^x \cos y - z, y)$, S a parte da superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$ para $1 \leq z \leq 2$, e $\vec{n}$ a normal exterior ao cone.