MAT3120 - Cálculo III - Lista 4

2 de maio de 2012

Entrega: 10/5/2012

Exercício 1. Sejam γ e K como no teorema de Green. Prove que a área de K é igual a $\int_\gamma x\ dy$, onde a integral é feita percorrendo-se γ no sentido anti-horário.

Exercício 2. Calcule

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\ dx + \frac{x}{x^2+y^2}\ dy$$

onde γ é uma curva fechada, simples, $\mathcal{C}^1$ por partes, orientada no sentido anti-horário, fronteira de um conjunto B, cujo interior contém o círculo $x^2+y^2 \leq 1$.

Exercício 3. Calcule a área da região limitada pela reta $y = x$ e pela curva $x = t^3 + t$ e $y = t^5 + t$, com $0 \leq t \leq 1$. Desenhe a região.

Exercício 4. (vejam a figura do exercício 8 da página 196 do Guidorizzi se não ficar claro o enunciado) Suponha P e Q de classe $\mathcal{C}^1$ em $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\}$. Suponha, ainda, que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ em Ω. Calcule $\int_\gamma P\ dx + Q\ dy$, sabendo que $\int_{\gamma_1} P\ dx + Q\ dy = 1$ e $\int_{\gamma_2} P\ dx + Q\ dy = 2$, onde γ, γ_1 e γ_2 são curvas fechadas, simples, $\mathcal{C}^1$ por partes quaisquer, tais que γ_1 e γ_2 estão no interior de γ e não se tocam, além de possuírem interior disjunto. Ainda, γ_1 é tal que $(1,1)$ está em seu interior e γ_2 tem $(0,0)$ em seu interior. Finalmente, considere que, no cálculo das integrais, γ está orientada no sentido anti-horário e as demais no sentido horário.

Exercício 5. Enuncie e demonstre o teorema da divergência de no plano (página 199 do volume 3 do Guidorizzi).

Exercício 6. Seja $\vec{F}(x,y) = x^3y^3\vec{i} + \left(3y + \frac{3}{4}x^2y^4\right)\vec{j}$ e seja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ com $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\ ds$ onde $\vec{n}$ é a normal com componente $y \geq 0$.