MAT3120 - Cálculo III - Lista 3

23 de abril de 2012

Entrega: 3/5/2012

Exercício 1. Calcule
$$\int_\gamma E \cdot d\vec{r},$$
onde $E(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2]}\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\gamma(t) = (t,1)$ com $t \in [-1,1]$.

Exercício 2. Calcule $\int_g ammadx + xy\ dy + z\ dz$, onde γ é a interseção de $x^2+y^2+z^2 = 2$, com $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$, com o plano $y = x$. O sentido do percurso é o do ponto $(0,0,\sqrt{2})$ para $(1,1,0)$.

Exercício 3. Calcule $\int_\gamma y^2\ dx + x\ dy - dz$, onde γ é a poligonal de vértices $A_0 = (0,0,0)$, $A_1 = (1,1,1)$ e $A_2 = (1,1,0)$, orientada de A_0 para A_2.

Exercício 4. Seja B o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, e γ é a fronteira de B orientada no sentido anti-horário. Verifique que
$$\int_\gamma P\ dx + Q\ dy = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dxdy$$
onde P e Q são supostas de classe $\mathcal{C}^1$ num aberto Ω contendo B.

Exercício 5. Calcule o centro de massa do fio $\gamma(t) = (t,t,t)$, com $t \in [0,1]$, com densidade linear $\delta(x,y,z) = xyz$. Sugestão: encontre a definição de centro de massa no Guidorizzi.

Exercício 6. Diga se são ou não conservativos e por qual motivo os campos $F_1(x,y,z,w) = (x,y,z,w)$, $F_2(x,y,z) = \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{i} + \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{j} + \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{k}$ e $F_3(x,y) = (-y,x)$.

Exercício 7. Seja $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \notin A\}$, onde A é a semi-reta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \geq 0\}$. Calcule
$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dx$$
onde $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva $\mathcal{C}^1$ por partes, com imagem contida em Ω, tal que $\gamma(0) = (1,1)$ e $\gamma(1) = (1,-1)$.

Exercício 8. Prove que os conjuntos abaixo são simplesmente conexos:

1. $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$
2. $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$