Equações Diferenciais ordinárias I

Segundo semestre de 2012

Lista de exercícios 5

Esta lista vale até 12 pontos dos 27 totais abaixo, sendo que você deve fazer ao menos 2 questões das questões cujo valor é maior ou igual a 2 pontos.

1. (1 ponto) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & y + t \\ \dot{y} = & -x + \sin(t) \end{cases}$$

2. $(0,5$ ponto cada) Classifique os pontos de equilíbrio dos sistemas

   (a)

$$\begin{cases} \dot{x} = & x^2 + y^2 - 4 \\ \dot{y} = & x^2 - y^2 \end{cases}$$

   (b)

$$\begin{cases} \dot{x} = & x - y \\ \dot{y} = & x + y - 2xy \end{cases}$$

   (c)

$$\begin{cases} \dot{x} = & ye^y \\ \dot{y} = & 1 - x^2 \end{cases}$$

3. (1 ponto) Mostre que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & -2x - y + xe^{x^2+y^2} \\ \dot{y} = & x - 2y + ye^{x^2+y^2} \end{cases}$$

   tem um único ponto de equilíbrio e uma única órbita periódica.

4. $(1,5$ ponto) Desenhe o retrato de fase do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = & -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

5. $(0,5$ ponto) Mostre que a equação $\ddot{x} + x^4 + 3 = 0$ não tem soluções periódicas

6. (2 pontos) Se $X = (X_1, X_2)$ é um campo de classe $\mathcal{C}^1(\Delta)$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ simplesmente conexo, com

$$div(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \neq 0$$

   para todos os pontos de Δ, então X não tem órbitas periódicas em Δ.

   Dica :Suponha que X tenha órbita periódica e aplique o teorema da divergência na região limitada por ela.

7. $(2,5$ pontos) Determine os pontos singulares do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & y \\ \dot{y} = & -b\sin(x) - ay, \quad a, b > 0 \end{cases}$$

Prove que não tem órbitas periódicas. Faça um esboço do retrato de fase deste sistema e compare com o caso $a = 0$.

Dica : Use o exercício 6 (desde que você o tenha provado).

8. $(0,7$ ponto cada) Verifique se as seguintes equações diferenciais possuem soluções periódicas

   (a) $\ddot{x} + (x^6 - x^2)\dot{x} + x = 0.$

   (b) $\ddot{x} + \dot{x}^2 - (1 + x^2) = 0.$

9. $(1,5$ ponto) Se $f, g : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}^2$ são tais que

$$< f(x), g(x) >= 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^2$$

e $\dot{x} = f(x)$, tem órbita fechada, mostre que g tem um zero.

10. (2 pontos) Seja $X = \nabla f = \text{grad } f$, onde f é uma função de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 2$, definida num aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Prove que X não possui órbitas periódicas. Se X tem pontos singulares isolados, então, para todo $p \in \Delta$, o conjunto $\omega-$limite de p é vazio ou é um ponto singular.

Dica: Se $\varphi(t)$ é uma trajetória de X, note que $\frac{df(\varphi(t))}{dt} > 0$, isto é, $f \circ \varphi$ é crescente.

11. $(1,5$ ponto) Determine o conjunto $\omega(p)$, para todo $p\imath\mathbb{R}^2$, no caso do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & y[y^2 + (x^2 - 1)^2] + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = & -x[y^2 + (x^2 - 1)^2] + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

12. (1 ponto) Ache uma integral primeira para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & x - 5y \\ \dot{y} = & x - y \end{cases}$$

isto é, determine uma função $V(x, y)$ tal que as soluções do sistema "moram" nas curvas de níveis de V.

Dica:Procure V da forma $V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

13. (1 ponto) O sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & 2xy \\ \dot{y} = & x^2 - y^2 \end{cases}$$

é conhecido como sela do macaco. Mostre que $V(x, y) = x^3 - xy^2$ é uma integral primeira para o sistema e esboce o plano de fase em torno da origem.

14. (2 pontos) Mostre que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = & -y + xf(r)/r \\ \dot{y} = & x + yf(r)/r, \quad r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

tem soluções periódicas, correspondendo aos zeros de $f(r)$. Determine essas soluções no caso $f(r) = (r-1)(r-2)(r-3)$. E discuta a estabilidade dos ciclos.

15. $(1,5$ ponto) Considere as equações do modelo presa-predador

$$\begin{cases} \dot{x} = & (a - by))x \\ \dot{y} = & (-c + dx)y \end{cases}$$

Determine uma função de Liapunov para esse sistema, em torno do ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$.

Dica: Procure V da forma $V(x, y) = F(x) + G(y)$.

16. $(3,5$ pontos) Esboce o plano de fase da equação $\ddot{x} + (x^2 + y^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, chamando a atenção para os pontos de equilíbrio, soluções periódicas, orientação das soluções, conjunto α e $\omega-$limites, estabilidade e instabilidade, etc. Todas as conclusões que você der justifique-as.

17. $(1,5$ ponto) Considere a equação de Liénard $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ e $G(x) = \int_0^x g(s)ds$. Suponha que $f(x) \geq -c$ e $G(x) \geq -k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde c, k são constantes positivas. Mostre que as soluções dessa equação estão definidas para todo $t \geq 0$.