Equações Diferenciais I (MAT-0226)
Segundo Semestre de 2012

Lista de Exercícios 4

1. Mostre que, se soluções ϕ da equação: $L(y) = a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$, definidas no intervalo I, são curvas no plano (t, y), então, nenhuma solução (exceto $\phi = 0$) pode ser tangente ao eixo do t em qualquer ponto de I

2. Esse exercício é para mostrar uma generalização do exercíco 3 da prova 1

   (a) Sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas soluções quaisquer linearmente independentes, em algum intervalo I, do operador $L(y)$ (ver exercício 1), em que a_0, a_1, a_2 são funções contínuas em I, com $a_0(t) \neq 0$ no mesmo intervalo. Mostre que o Wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)(t)$ satisfaz a equação linear

   $$W' = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}W,\ t \in I \tag{1}$$

   (b) Resolvendo (1), deduza a fórmula de Abel

   $$W(\phi_1, \phi_2)(t) = W(\phi_1, \phi_2)(t_0)exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right)$$

   para $t_0, t \in I$.

   (c) Conclua o seguinte fato: Sejam a_0, a_1, a_2 funções contínuas em algum intervalo I com $a_0(t) \neq 0$ no mesmo intervalo. Sejam ϕ_1 e ϕ_2 duas soluções quaisquer linearmente independentes, em I, do operador $L(y)$ (ver exercício 1). Então seu Wronskiano, $W(\phi_1, \phi_2)(t)$ ou é nulo para todo $t \in I$ ou nunca se anula em I.

   (d) Generalize os resultados acima no caso em que temos $n > 2$ soluções linearmente independentes do operador $L_n(y) = a_0(t)y^{(n)} + \ldots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0$ em algum intervalo I.

3. Dada uma solução ϕ_1, em cada caso encontre a segunda solução, ϕ_2 linearmente independente com ϕ_1, no intervalo indicado

   (a) $y'' - \frac{2}{x^2 y} = 0$, $\phi_1(x) = x^2$, $0 < x < \infty$

   (b) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$, $\phi_1(x) = exp(x^2)$, $-\infty < x < \infty$

   (c) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $\phi_1(x) = x$, $0 < x < 1$

   (d) $xy'' - (x + 1)y' + y = 0$, $\phi_1(x) = exp(x)$, $0 < x$

4. Mostre que

   $$\psi_p(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)[\phi_2(t)\phi_1(s) - \phi_1(t)\phi_2(s)]}{a_0(s)W(\phi_1, \phi_2)(s)}ds$$

   satisfaz $L(y) = f$ para qualquer intervalo I.

5. use a fórmula do exercício anterior e o fato de toda solução de $L(y) = f$ ser da forma $\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \psi_p(t)$ para mostrar que se f for limitada em $0 \leq t < \infty$ então toda solução de $y'' + 5y' + 4y = f(t)$ é limitada em $0 \leq t < \infty$.

6. Ache todas as soluções das seguintes equações:

   (a) $y'' - 4y = 0$

   (b) $3y'' + 2y' = 0$

   (c) $y'' + 16y = 0$

   (d) $y'' = 0$

   (e) $y'' + 2iy' + y = 0$

   (f) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0$

7. Considere a equação

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

   onde as constantes a_1 e a_2 são reais. Suponha que $\alpha + i\beta$ seja uma raiz complexa do polinômio característico, α e β reais e $\beta \neq 0$.

   (a) Mostre que $\alpha - i\beta$ também é raiz.

   (b) Mostre que qualquer solução ϕ pode ser escrita da forma

$$\phi(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

   onde c_1 e c_2 são constantes.

   (c) Mostre que $\alpha = -a_1/2$ e $\beta^2 = a_2 - (a_1^2/4)$

   (d) Mostre que toda solução tende para zero, quando $x \to \infty$ se $a_1 > 0$.

   (e) Mostre que a magnitude de toda solução não trivial assume valores arbitrariamente grandes quando $x \to \infty$ se $a_1 < 0$.

8. Ache a solução da equação

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

9. Ache a solução da equação

$$x^{(3)} - \ddot{x} + \dot{x} + x = 0$$