Equações Diferenciais ordinárias I
Segundo semestre de 2012

Lista de exercícios 3

1. Mostre que se α, β e δ são funções contínuas em $I = [x_0, b]$, tais que:

   - $\delta(x) \leq \alpha(x) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \beta(s)\delta(s)\, ds$ para todo $x \in I$
   - $\beta(x) \geq 0$ para todo $x \in I$
   - α é não decrescente

   então vale
   $$\delta(x) \leq \alpha(x) e^{\int_{x_0}^{x} \beta(s)\, ds} \qquad \text{para todo } x \in I\,.$$

2. Considere a equação diferencial autônoma $y' = f(y)$. Admita que f está definida em um aberto limitado (isso é, de fecho compacto). Prove (ou dê contra-exemplo) que as soluções não prolongáveis e/ou maximais são globais (ou seja, definidas em $\mathbb{R}$). *Dica:* Consertar o enunciado original era difícil demais...

3. Considere a equação diferencial autônoma $\dot{x} = f(x)$ e, por simplicidade, admita que vale o teorema de existência e unicidade e, ainda, que suas soluções são globais (ie, definidas em $\mathbb{R}$). Considere a solução da equação ϕ_{x_0} tal que $\phi_{x_0}(0) = x_0$. Para t fixado, defina $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi_t(x) := \phi_x(t)$. Mostre que valem as seguintes propriedades:

   i) $\varphi_0(x) = x$ (isso é, $\varphi_0 = Id$)

   ii) $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$

   iii) φ_t é um homeomorfismo para todo t real (lembre-se que um homeomorfismo é uma aplicação bijetora, contínua e de inversa contínua). *Dica*: use dependência das condições iniciais para mostrar a continuidade, e os itens anteriores para mostrar a bijeção.

   Estas três propriedades são o que chamamos de propriedade do fluxo para as soluções da EDO.