Equações Diferenciais I (MAT-0226)

Segundo Semestre de 2012

Lista de Exercícios 2

1. Integre as equações:

   (a) $(x^2 + 1)y' + 2xy - x^2 = 0$

   (b) $xy' + y = 0$.

   Estude os oitos problemas de valor inicial para as equações acima

   (a) $y(0) = 0$

   (b) $y(1) = 1$

   (c) $y(-1) = 1$

   (d) $y(-1) = -1$

2. Resolva as equações

   (a)
   $$\left(x + \frac{2}{y}\right) y' + y = 0;$$

   (b)
   $$(x + 2y^4)y' + (y - 2x^4) = 0.$$

3. (*Família de curvas, seção* 3.5*, página* 84 *do livro do Djairo.*) Em geral, *uma família de curvas a um parâmetro* é definida por $f(x, y, \lambda) = 0$, onde $f : \Omega \times \Lambda \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, Ω um aberto do plano e Λ um intervalo da reta.

   Põe-se a seguinte questão: dada uma família de curvas (como a definição anterior) a um parâmetro, existe uma equação diferencial, para a qual essa família represente suas soluções?

   Exemplos:

   Família de parábolas
   $$f(x, y, \lambda) = y - 2\lambda x^2 - \lambda;$$
   onde x, y, $\lambda \in \mathbb{R}$. Derivando com relação a x obtemos
   $$y' - 4\lambda x = 0.$$
   Eliminando λ obtemos
   $$(2x^2 + 1)y' - 4xy = 0$$
   que é a equação cuja as soluções são dadas pela família.

   Obtenha as equações diferenciais correspondentes às famílias de curvas:

(a) $y = \lambda e^{\lambda x}$
(b) $y = \lambda x + \sin(\lambda^2 + 1)$
(c) Família de todas as retas passando pelo ponto (a, b).

4. Integre as equações:

   (a) $ydx - (x + xy^3)dy = 0$
   (b) $(y + x^5 + x^3y^2)dx - xdy = 0$
   (c) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$
   (d) $xdx + ydy = \sqrt{x^2 + y^2}dx.$

5. As equações abaixo são escritas da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, onde M, N existe no plano todo. Determine quais das equações são exatas no plano, e resolva-as:

   (a) $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$
   (b) $(x^2 + xy)dx + xydy = 0$
   (c) $e^x dx + (e^y(y + 1))dy = 0$
   (d) $\cos(x)\cos^2(y)dx - \sin(x)\sin(2y)dy = 0$
   (e) $x^2y^3dx - x^3y^2dy = 0$
   (f) $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$
   (g) $(2ye^{2x} + 2x\cos(y))dx + (e^{2x} - x^2\sin(y))dy = 0$

6. Mesmo quando uma equação do tipo $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ não é exata, às vezes, não é muito difícil achar uma função $u(x, y)$, que não se anula, tal que,

$$u(x, y)M(x, y)dx + u(x, y)N(x, y)dy = 0$$

   é exata. Tal função é chamada de fator integrante.

   Ache o fator integrante para cada uma das seguintes funções, e resolva-as:

   (a) $ydx - xdy = 0$
   (b) $(2y^3 + 2)dx + 3xy^2dy = 0$
   (c) $\cos(x)\cos(y)dx - 2\sin(x)\sin(y)dy = 0$
   (d) $(5x^3y^2 + 2y)dx + (3x^4y + 2x)dy = 0$
   (e) $(e^y + xe^y)dx + xe^ydy = 0$

7. Considere a equação linear

$$y' + a(x)y = b(x),$$

   onde a e b são contínuas em algum intervalo I.

   (a) Mostre que existe um fator integrante que só dependa de x.
   (b) Resolva essa equação, usando um fator integrante.