Equações Diferenciais ordinárias I
Segundo semestre de 2012

Lista de exercícios

1. Obtenha as soluções:
   (a) $y' - 2xy = x$;
   (b) $y' = (1 + x)(1 + y)$;
   (c) $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$;
   (d) $y' = 1 + y^2$;
   (e) $y' = (xy)^2 - 4x^2$

2. Ache a solução da equação $y' = 2y^{1/2}$, passando por $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Faça uma discussão completa de todos os casos possíveis. Qual o conjunto das condições iniciais em que o teorema de existência unicidade vale? Esboce o gráfico das soluções.

3. Resolva o problema de valor inicial $y' = xy^3$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$.

4. Seja $g(t) = \frac{2}{t^2-1}$, $|t| \neq 1$.
   (a) Mostre que toda solução de $\dot{x} = g(t)$ é da forma
   $$\varphi(t) = c + \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|,\ c \in \mathbb{R}.$$
   (b) Faça esboço destas soluções em $\Omega = \{t;\ |t| \neq 1\} \times \mathbb{R}$

5. Seja $f(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Mostre que toda solução de $\dot{x} = f(x)$ diferente das soluções $\varphi_+ \equiv 1$, e $\varphi_- \equiv -1$ é da forma
   $$\varphi(t) = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t},\ c \neq 0.$$
   Qual é o intervalo máximo de definição destas soluções? Faça um esboço geomátrico das soluções em $\Omega = \mathbb{R}^2$.

6. *Equações homogêneas.* Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   (a) As equações da forma $\dot{x} = f(\frac{x}{t})$, $t \neq 0$, são chamadas homogêneas. Prove que a mudança de variável $x = yt$, transforma equações homogêneas em equações com variáveis separáveis.

(b) resolva a equação
$$\dot{x} = \frac{x+t}{t},\ x(1) = 0.$$

7. Encontre os valores de α e β para os quais $\dot{x} = at^\alpha + bx^\beta$ se transforma numa equação homogênea por meio de uma mudança de variáveis da forma $x = y^m$.

8. Mostre que $\varphi(t) = c_1e^t + c_2te^t$ é solução de $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$, para quaisquer constantes c_1, c_2.

9. Mostre que $\varphi(t) = c_1e^{-t} + c_2\cos(\sqrt{3}t/2)e^{t/2} + c_3\sin(\sqrt{3}t/2)e^{t/2}$ é solução de $\dddot{x} + \dot{x} = 0$, para quaisquer constantes c_1, c_2, c_3.

10. Considere a equação diferencial
$$y' = \begin{cases} 0 & (x \leq 0; -\infty < y < \infty) \\ 2y^{1/2} & (x \geq 0; 0 \leq y < \infty) \\ y^2 & (x \geq 0; -\infty < y < 0) \end{cases}$$
   (a) Mostre que
   $$\phi(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ (x+1)^2 & (x > 0) \end{cases}$$
   é uma solução em $-\infty < x < \infty$.
   (b) $\phi(x)$ é contínua em toda parte?
   (c) $\phi(x)$ é $\mathcal{C}^1$ em toda parte?
   (d) Vale o teorema de existência e unicidade na condição inicial $(0, 1)$?

11. Mostre que utilizando mudanças de coordenadas convenientes, podemos transformar equações do tipo
$$\dot{x} = f\left(\frac{a_1x + b_1t + c_1}{a_2x + b_2t + c_2}\right)$$
em equações homogêneas ou de variáveis separáveis.
(Sugestão: Quando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ use $x = u + \alpha$ e $t = s + \beta$, caso contrário, basta $u = a_1x + b_1t$.)
Resolva
$$\dot{x} = \frac{2x + t - 1}{x + 2t + 1},\ x(0) = 1.$$

12. (*Equação de Bernoulli*). A equação abaixo
$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x em um intervalo (a,b) e $n \in \mathbb{Z}$, é conhecida como a equação de Bernoulli. Se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, a equação não é linear, mas pode ser transformada em uma equação linear mediante a mudança de variável dependente $z = y^{1-n}$. Demonstre esse fato, e resolva os seguintes problemas de valor inicial

(a)
$$y' + \frac{1}{x}y = (\cos(x))y^{-2},\ y(1) = 1$$

(b)
$$y' + x^2 y = \frac{1}{x^2}y^4,\ y(-1) = -2$$