Lista 3

Vetores e Geometria MAT0112

25 de Maio de 2018

1 Produto misto

Exercício 1.1. Calcule o produto misto $A.B \times C$ nos seguintes casos:

1. $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 4, 0)$ e $C = (0, 0, 8)$
2. $A = (2, 3, -1)$, $B = (3, -7, 5)$ e $C = (1, -5, 2)$
3. $A = (2, 1, 3)$, $B = (-3, 0, 6)$ e $C = (4, 5, -1)$

Exercício 1.2. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $i + j$, $j + k$ e $k + i$.

Exercício 1.3. Prove a seguinte igualdade:

$$A \times B = A.(B \times i)i + A.(B \times j)j + A.(B \times k)k$$

Exercício 1.4. Utilize as propriedades algébricas do *produto escalar* e do *produto vetorial* para mostrar as seguintes propriedades do *produto misto*

1. $(A + B).(A + B) \times C = O$
2. $A.B \times C = -B.A \times C$ (*Dica*: Use o item (1) e as leis distributivas).
3. $A.B \times -A.C \times B$
4. $A.B \times C = -C.B \times A$ (*Dica*: Use os itens (2) e (3)).

Utilizando os itens (2), (3) e (4), mostre que

$$A.B \times C = B.C \times A = C.A \times B$$

ou seja, uma permutação cíclica de A, B e C não altera o produto misto.

Exercício 1.5. Esse exercício é um roteiro para demonstrar a seguinte identidade:

$$(*). \qquad A \times (B \times C) = (C.A)B - (B.A)C.$$

Para $B = (b_1, b_2, b_3)$ e $C = (c_1, c_2, c_3)$, mostre que

$$i \times (B \times C) = c_1 B - b_1 C,$$

isto prova a identidade $(*)$ para o caso especial $A = i$. Prove as identidades correspondentes para $A = j$ e $A = k$ e em seguida combine as identidades para provar $(*)$ no caso geral.

Exercício 1.6. Utilize o exercício anterior para demonstrar as seguintes identidades:

1. $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B.D)C - (A \times B.C)D$.
2. $A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$.
3. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ se, e somente se, $B \times (C \times A) = O$.
4. $(A \times B)(C \times D) = (B.D)(A.C) - (B.C)(A.D)$.

Exercício 1.7. Prove a seguinte igualdade:

$$(A \times B).(B \times C) \times (C \times A) = (A.B \times C)^2$$

Exercício 1.8.

1. Prove que o volume de um tetraedro de vértices A, B, C e D é dado por
$$\frac{1}{6}|(B - A).(C - A) \times (D - A)|$$
2. Calcule o volume de um tetraedro de vértices $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (0, 3, 0)$ e $D = (4, 0, 0)$.

Exercício 1.9.

1. Se $B \neq C$, prove que a distância de A a reta que passa pelos pontos B e C é dada por
$$\frac{\|(A - B) \times (C - B)\|}{\|B - C\|}$$
2. Calcule a distância no item anterior quando $A = (1, -2, -5)$, $B = (-1, 1, 1)$ e $C = (4, 5, 1)$.

2 Equação cartesiana do plano e vetor normal ao plano

Exercício 2.1. Sejam $A = 2i + 3j - 4k$ e $B = j + k$.

1. Encontre um vetor N não nulo e ortogonal a A e B.
2. Dê a equação cartesiana do plano gerado por A e B que passa pela origem.

3. Dê a equação cartesiana do plano gerado por A e B que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$.

Exercício 2.2. Seja um plano Π de equação cartesiana $x + 2y - 2z + 7 = 0$. Encontre para Π:

1. Um vetor normal de comprimento unitário.

2. As intersecções com os eixos de V_3.

3. A distância do plano a origem.

4. O ponto Q do plano Π mais próximo a origem.

Exercício 2.3. Os três pontos $(1, 1, -1)$, $(3, 3, 2)$ e $(3, -1, -2)$ determinam um plano Π. Determine:

1. Um vetor não nulo normal a Π.

2. A equação cartesiana de Π.

3. A distância de Π a origem de V_3.

Exercício 2.4. Encontre a equação cartesiana do plano determinado por $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(-1, 7, -2)$.

Exercício 2.5. Uma reta paralela a um vetor não nulo N é dita perpendicular a um plano Π se N é normal a Π. Encontre a equação cartesiana de um plano Π que passa pelo ponto $(2, 3, -7)$ dada que a reta determinada pelos pontos $(1, 2, 3)$ e $(2, 4, 12)$ é perpendicular a Π.

Exercício 2.6. Encontre a equação paramétrica da reta que contém o ponto $(2, 1, -3)$ e é perpendicular ao plano de equação $4x - 3y + z = 5$.

Exercício 2.7. Calcule o volume do tetraedro cujo os vértices são a origem e os pontos tais que que o plano de equação $x + 2y + 3z = 6$ instersecta os eixos de V_3.

Exercício 2.8. Prove que se dois planos Π e Π' não são paralelos, então $\Pi \cap \Pi'$ é uma reta [1]

3 Cônicas

Exercício 3.1. Determine as coordenadas do centro, dos focos, dos vértices, a excentricidade, e esboçe um desenho de cada uma das elipses a seguir:

1. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

2. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

[1] Aqui estamos supondo que os planos Π e Π' estão contidos em V_3.

3. $9x^2 + 25y^2 = 25$

Exercício 3.2. Em cada um dos casos a seguir, determine a equação cartesiana da elipse que satisfaz as condições dadas:

1. Centrada em $(-3, 4)$, com semi-eixos de comprimentos 4 e 3, o maior eixo sendo paralelo ao eixo x.
2. Vértices $(3, -2)$, $(13, -2)$ e focos $(4, -2)$, $(12, -2)$.

Exercício 3.3. Determine as coordenadas do centro, dos focos, dos vértices, a excentricidade, e esboçe um desenho de cada uma das hipérboles (com as assíntotas) a seguir:

1. $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$.
2. $(x+3)^2 - (y-3)^2 = 1$.
3. $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Exercício 3.4. Em cada um dos casos a seguir, determine a equação cartesiana da hipérbole que satisfaz as condições dadas:

1. Focos $(0, \sqrt{2})$, $(0, -\sqrt{2})$ e vértices $(0, 1)$, $(0, -1)$.
2. Centro $(2, -3)$, eixo transversal paralelo a algum dos eixos de coordeanada, passando pelos pontos $(3, -1)$ e $(-1, 0)$.

Exercício 3.5. Determine as coordenadas do vértice, a equação da reta diretriz, os eixos, e esboçe um desenho de cada uma das parábolas a seguir:

1. $y^2 = 3x$.
2. $(y-1)^2 = 12x - 6$.
3. $x^2 = 8y = 0$.

Exercício 3.6. Em cada um dos casos a seguir, determine a equação cartesiana da parábola que satisfaz as condições dadas:

1. Foco $(0, -\frac{1}{4})$ e reta diretriz $y = \frac{1}{4}$.
2. Vértice $(0, 0)$ e equação diretriz $x = -2$.
3. Eixo paralelo ao eixo y, passando pelos pontos $(0, 1)$, $(1, 0$ e $(2, 0$.

Exercício 3.7. Encontre a equação cartesiana da cônica que consiste dos pontos (x, y) tais que a distância ao ponto $(0, 2)$ é a metade da distância a reta de equação $y = 8$.

Exercício 3.8. Encontre a equação cartesiana da parábola com foco na origem e reta diretriz $x + y + 1 = 0$.

Exercício 3.9. Encontre a equação cartesiana da hipérbole que passa pela origem com assíntotas $y = 2x + 1$ e $y = -2x + 3$.