Lista 2

Vetores e Geometria MAT0112

16 de Abril de 2018

1 Conjunto gerado, dependência e independência linear

Exercício 1.1. Se $A = (1, 2)$, $B = (2, -4)$ e $C = (2, -3)$ são vetores em V_3, encontre escalares x e y tais que $C = xA + yB$. Quantos pares (x, y) de escalares satisfazem a relação anteior?

Exercício 1.2. Se $A = (2, -1, 1)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (2, -11, 7)$ são vetores em V_3, econtre escalares x e y tais que $C = xA + yB$. Prove que se $C = (2, 11, 7)$ então não existem escalares x e y tais que a relação anterior seja satisfeita.

Exercício 1.3. Sejam A e B vetores em V_n.

1. Se A e B possuem a mesma direção, prove que A e B são linearmente independentes.
2. Se A e B não são paralelos, prove que A e B são linearmente independentes.

Exercício 1.4. Sejam $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ dois vetores em V_2, prove que A e B são linearmente independentes se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.

Exercício 1.5. Sejam $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ os vetores de coordenadas unitárias em V_2 e seja $S = \{i, i + j\}$.

1. Prove que S é linearmente independente.
2. Prove que j é uma combinção linear de S.
3. Expresse $3i - 4j$ como uma combinação linear de i e $i + j$.
4. Prove que $L(S) = V_2$.

Exercício 1.6. Sejam $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$ os vetores de coordenadas unitárias em V_3 e $A = i$, $B = i + j$ e $C = i + j + 3k$.

1. Prove que $S = \{A, B, C\}$ é linearmente independente.

2. Expresse os vetores j e k como uma combinação linear de A, B e C.

3. Expresse $2i - 3j + 5k$ como uma combinação linear de A, B e C.

4. Prove que $\{A, B, C\}$ é uma base de V_3.

Exercício 1.7. Sejam A, B e C três vetores linearmente independentes em V_n. Prove (ou prove o contrário) cada uma das afirmaçãoes abaixo:

1. $A + B$, $B + C$, $A + C$ são linearmente independentes.

2. $A - B$, $B + C$, $A + C$ são lineramente independentes.

Exercício 1.8. Sejam X e Y dois subconjuntos finitos de vetores em V_n e sejam $L(X)$ e $L(Y)$ os subespaços gerados respectivamente por X e Y [1]. Prove cada uma das afirmações abaixo:

1. Se $X \subset Y$ então $L(X) \subset L(Y)$.

2. $L(X \cap Y) \subset L(X) \cap L(Y)$.

3. Dê um exemplo onde $L(X \cap Y) \neq L(X) \cap L(Y)$.

2 Retas e propriedades

Exercício 2.1. Seja L a reta em V_2 contendo os pontos $P = (-3, 1)$ e $Q = (1, 1)$. Determine todos os pontos a seguir que estão em L [2];

1. $(0, 0)$.

2. $(0, 1)$.

3. $(1, 2)$.

4. $(2, 1)$.

5. $(-2, 1)$.

Exercício 2.2. Seja L a reta em V_3 que contém o ponto $P = (-3, 1, 1)$ e que é paralela ao vetor $(1, -2, 3)$. Determine quais dos pontos a seguir estão em L [3];

1. $(0, 0, 0)$.

2. $(2, -1, 4)$.

3. $(-2, -1, 4)$.

4. $(-4, 3, -2)$.

[1] Isto é, se $X = \{A_1, ..., A_m\}$ onde m é um inteiro positivo, então $L(X)$ é o conjunto das combinações lineares $a_1A_1 + ... + a_mA_m$ onde $a_1, ..., a_m$ são escalares.

[2] Justifique

[3] Justifique

5. $(2, -9, 16)$.

Exercício 2.3. Em cada um dos casos a seguir, determine quando os três vetores P, Q e R estão numa mesma reta.

1. $P = (2, 1, 1)$, $Q = (4, 1, -1)$, $R = (3, -1, 1)$.
2. $P = (2, 2, 3)$, $Q = (-2, 3, 1)$, $R = (-6, 4, 1)$.
3. $P = (2, 1, 1)$, $Q = (-2, 3, 1)$, $R = (5, -1, 1)$.

Exercício 2.4. 1. Prove que duas retas $L(P; A)$ e $L(Q; B)$ em V_n se intersectam se, e somente se, $P - Q$ é a combinação linear de A e B.

2. Determine se as retas a seguir se intersectam ou não se intersectam:

$$L = \{(1, , 1, -1) + t(-2, 1, 3) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L' = \{(3, -4, 1) + t(-1, 5, 2) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 2.5. Sejam $L(P; A)$ e $L(Q; B)$ duas retas não paralelas em V_n. Prove que $L(P; A) \cap L(Q; B)$ é vazio ou contém um único ponto.

3 Planos e propriedades

Exercício 3.1. Seja $M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ onde $P = (1, 2, -3)$, $A = (3, 2, 1)$ e $B = (1, 0, 4)$. Determine quais dos pontos a seguir estão no plano M:

1. $(1, 2, 0)$.
2. $(1, 2, 1)$.
3. $(6, 4, 6)$.
4. $(6, 6, 6)$.
5. $(6, 6, -5)$.

Exercício 3.2. Seja M um plano parametrizado pelas seguintes equções:

$$x(s, t) = 1 + s - 2t, \qquad y(s, t) = 2 + s + 4t, \qquad z(s, t) = 2s + t$$

1. Determine quais dos pontos a seguir está em M: $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(2, -3, -3)$.
2. Encontre vetores P, A e B tais que

$$M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 3.3. Seja M um plano determinado pelos pontos não colineares P, Q e R.

1. Se p, q e r são escalares tais que $p + q + r = 1$, prove que $pP + qQ + rR$ está em M.

2. Prove que todo ponto de M é da forma $pP + qQ + rR$ onde p, q e r são escalares tais que $p + q + r = 1$.

Exercício 3.4. Determine a equação linear Cartesiana $ax + by + cz = d$ para cada um dos seguintes planos:

1. O plano que passa pelo ponto $(2, 3, 1)$ e é gerado pelos vetores $(3, 2, 1)$ e $(-1, -2, -3)$.

2. O plano que contém os pontos $(2, 3, 1)$, $(-1, -2, -3)$ e $(4, 3, 1)$.

3. O plano que passa pelo ponto $(2, 3, 1)$ e é paralelo ao plano que passa pela origem e é gerado pelos vetores $(2, 0, -2)$ e $(1, 1, 1)$.

Exercício 3.5. Sejam P e Q dois pontos que estão no mesmo plano M. Prove que todo ponto da reta determinada por P e Q também está em M.

Exercício 3.6. Seja L a reta que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e é paralela ao vetor $(1, 1, 1)$ e seja $(2, 3, 5)$ um ponto que não está em L. Encontre a equação Cartesiana do plano M que passa pelo poto $(2, 3, 5)$ e que contém todos os pontos de L.

Exercício 3.7. Sejam L um reta e P um ponto que não está em L. Prove que existe um, e apenas um plano M que passa pelo ponto P e contém todos os pontos da reta L.

4 Produto Vetorial

Exercício 4.1. Em cada um dos casos a seguir, encontre um vetor de comprimento 1 em V_3 que seja ortogonal aos vetores A e B:

1. $A = i + j + k, \qquad B = 2i + 3j - k.$

2. $A = 2i - 3j + k, \qquad B = -i + 5j + 7k.$

3. $A = i - 2j + 3k, \qquad B = -3i + 2j - k.$

Exercício 4.2. Em cada um dos casos a seguir, utilize o produto vetorial para calcular a área do triângulo com vértices A, B e C:

1. $A = (0, 2, 2), \quad B = (2, 0, -1), \quad C = (3, 4, 0).$

2. $A = (-2, 3, 1), \quad B = (1, -3, 4), \quad C = (1, 2, 1).$

3. $A = (0, 0, 0), \quad B = (0, 1, 1), \quad C = (1, 0, 1).$

Exercício 4.3. Prove que $\|A \times B\| = \|A\|\|B\|$ se, e somente se, A é ortogonal a B.

Exercício 4.4. Sejam A e B dois vetores de comprimento 1 e ortognais em V_3.

1. Prove que A, B e $A \times B$ formam uma base ortonormal de V_3.
2. Seja $C = (A \times B) \times A$. Prove que $\|C\| = 1$.
3. Desenhe uma figura ilustrando a relação geométrica entre os vetores A, B e $A \times B$ e use esta figura para obter as relações:

$$(A \times B) \times A = B, \qquad (A \times B) \times B = -A$$

4. Prove as relações do item anterior algébricamente.

Exercício 4.5.

1. Prove que se $A \times B = 0$ e $A.B = 0$, então $A = O$ ou $B = O$ e dê uma interpretação geométrica desta fato.
2. Suponha que $A \neq O$. Prove que se $A \times B = A \times C$ e $A.B = A.C$, então $B = C$.