Lista 1 Vetores e Geometria MAT0112
Álgebra Vetorial

23 de Março de 2018

1 Vetores no V_n

Exercício 1.1. Sejam $A = (1, 3, 6)$, $B = (4, -3, 3)$ e $C = (2, 1, 5)$ três *vetores* de V_3. Determine cada *coordenada* dos seguintes *vetores* [1]

1. $A + B$
2. $A - B$
3. $A + B - C$
4. $7A - 2B - 3C$
5. $2A + B - 3C$

Exercício 1.2. Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Mostre que todo *vetor* do tipo $C = (c_1, c_2)$ de V_2 pode ser escrito na forma $C = xA + yB$ onde x e y são números *reais*. Para cada $C = (c_1, c_2)$, expresse os os números x e y em função de c_1 e c_2.

Exercício 1.3. Sejam $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (1, 1, 0)$ três *vetores* de V_3 e seja $D = xA + yB + zC$, onde x,y e z são *escalares*.

1. Determine cada *coordenada* de D.
2. Se $D = O$, prove que $x = y = z = 0$.
3. Encontre x, y, z tais que $D = (1, 2, 3)$.

Exercício 1.4. Sejam $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 1, 1)$ três *vetores* de V_3 e seja $D = xA + yB + zC$, onde x,y e z são *escalares*.

1. Determine cada *coordenada* de D.
2. Encontre escalares x,y e z não todos nulos [2] tais que $D = O$.

[1] Isto é, escreva cada *vetor* na forma (a, b, c).
[2] Isto é, pelo menos um dos números x,y e z deve ser diferente de zero.

3. Prove que não há nenhuma escolha de escalares x,y e z de modo que $D = (1, 2, 3)$.

Exercício 1.5. Sejam $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1, 1)$ e $C = (1, 1, 0, 0)$ três *vetores* em V_4 e seja $D = xA + yB + zC$, onde x, y e z são *escalares.*

1. Determine cada *coordenada* de D.
2. Se $D = O$, prove que $x = y = z = 0$.
3. Encontre *escalares* x,y e z tais que $D = (1, 5, 3, 4)$.
4. Prove que não existe uma escolha de *escalares* x,y e z de modo que $D = (1, 2, 3, 4)$.

Exercício 1.6. Prove que se A e B são dois *vetores* de V_n e existe um *vetor* C de V_n tal que A e B possuem a mesma *direção* de C, então A e B possuem *direções* iguais [3].

2 Produtos Internos, Normas e Projeções

Exercício 2.1. Sejam $A = (1, 2, 3, 4)$, $B = (-1, 2, -3, 0)$ e $C = (0, 1, 0, 1)$ três *vetores* de V_4. Calcule os seguintes *produtos internos*:

1. $A.B$
2. $B.C$
3. $A.C$
4. $A.(B + C)$
5. $(A - B).C$

Exercício 2.2. Considere a seguinte afirmação sobre os *vetores* de V_n:

$(*)$. Se $A.B = A.C$ e $A \neq O$, então $B = C$.

Prove que $(*)$ é *verdadeira* ou dê um *contra-exemplo* que prove o contrário. [4].

[3] Se você preferir, poderá provar que a relação "ter a mesma *direção*", indicada por $||$, é uma *relação de equivalência*; isto siginica dizer que a relação $||$ satisfaz as seguintes propriedades:
(i). (*Reflexividade*): $A||A$.
(ii). (*Simetria*): Se $A||B$ então $B||A$.
(iii). (*Transitividade*): Se $A||B$ e $B||C$, então $A||C$.
(A notação $A||B$ abrevia o fato que A têm a mesma *direção* de B).

[4] Se a afirmação $(*)$ for *falsa*, exiba *vetores* A,B e C que falsificam $(*)$, ou seja, exiba *vetores* A,B e C de V_n (você pode aqui tomar $n = 2$ ou $n = 3$ por exemplo) tais que $A.B = A.C$, $A \neq O$, mas $B \neq C$, contrariando $(*)$.

Exercício 2.3. Considere a seguinte afirmação sobre os *vetores* de V_n:

($*$). Se $A.B = O$ para todo *vetor* B, então $A = O$.

Prove que ($*$) é *verdadeira* ou dê um *contra-exemplo* que prove o contrário.

Exercício 2.4. Se $A = (2, -1, 2)$ e $B = (1, 2, -2)$, encontre *vetores* C e D de V_3 satisfazendo as seguintes condições:

$$A = C + D, \qquad B.D = O, \qquad C||B.$$

(O símbolo $C||B$ siginifca que C e B possuem a mesma *direção*).

Exercício 2.5. Sejam $A = (2, -1, 5)$, $B = (-1, -2, 3)$ e $C = (1, -1, 1)$ três *vetores* de V_3. Calcule a *norma* dos seguintes *vetores*:

1. $A + B$
2. $A - B$
3. $A + B - C$
4. $A - B + C$

Exercício 2.6. Seja $A = (a, b)$ um *vetor* de V_2. Encontre um *vetor* $B = (x, y)$ de V_2 tal que $\|B\| = \|A\|$ e $B.A = 0$.

Exercício 2.7. † Se $A = (2, -1, 1)$ e $B = (3, -4, -4)$, encontre um *vetor* C de V_3 tal que A, B e C são vértices de um triângulo retângulo.

Exercício 2.8. Se $A = (1, -1, 2)$ e $B = (2, 1, -1)$, encontre um *vetor* não nulo de V_3 ortogonal a A e B.

Exercício 2.9. Prove que para todo par A e B de *vetores* de V_n vale a igualdade:

$$\|A + B\|^2 - \|A - B\|^2 = 4A.B$$

Exercício 2.10. † Seja A um *vetor* em V_n de *comprimento* 6. Se B é um *vetor* de V_n satisfazendo a propriedade que para todo par de *escalares* x e y, os *vetores* $xA + yB$ e $4yA - 9xB$ são *ortogonais*, calcule o *comprimento* de B e $2A + 3B$.

Exercício 2.11. † Prove que é verdadeira, ou que é falsa, cada uma das afirmações a seguir sobre os *vetores* de V_n:

1. Se A é *ortogonal* a B, então $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo *escalar* x.
2. Se $\|A + xB\| \geq \|A\|$ para todo *escalar* x, então A é *ortogonal* a B.

Exercício 2.12. Determine a *projeção* de A sobre B noss seguintes casos:

1. $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 2, 2)$.
2. $A = (4, 3, 2, 1)$ e $B = (1, 1, 1, 1)$.

Exercício 2.13. Se θ é o *ângulo* entre dois *vetores* A e B de V_n prove a *lei dos cossenos*:

$$\|A-B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos(\theta)$$

Exercício 2.14. Prove que o *ângulo* entre os *vetores* $A = (1,2,1)$ e $B = (2,1,-1)$ é o dobro do *ângulo* entre os *vetores* $C = (1,4,1)$ e $D = (2,5,5)$.

Exercício 2.15. Utilize os métodos vetoriais para determinar os *cossenos* dos *ângulos* do triângulo em $\mathbb{R}^3$ cujo os vértices são os pontos $(2,-1,1)$, $(1,-3,-5)$ e $(3,-4,-4)$.

Exercício 2.16. Sejam A,B e C três *vetores* não-nulos de V_n. Suponha que o *ângulo* entre A e C é igual ao *ângulo* entre B e C. Prove que C é *ortogonal* ao *vetor* $\|B\|A - \|A\|B$.

Exercício 2.17. Sejam os *vetores* $A = (\cos(\theta), -\sin(\theta))$ e $B = (\sin(\theta), \cos(\theta))$ de V_2.

1. Prove que A e B são *vetores ortogonais* e de *comprimento* 1. Esboçe A e B no caso em que $\theta = \pi/6$.

2. Encontre todos os *vetores* (x,y) de V_2 tais que $(x,y) = xA + yB$. Tenha certeza de ter considerado todos os valores possíveis de θ.

Exercício 2.18. † Suponha que em V_2 nós tenhamos definido o *produto interno* entre dois *vetores* $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ do seguinte modo:

$$A.B = 2a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1$$

Mostre que este “novo” *produto interno* também satisfaz as condições a seguir:

1. (*Comutatividade*): $A.B = B.A$

2. (*Distributividade*): $A.(B+C) = A.B + A.C$

3. (*Homogêneidade*): $c(A.B) = (cA).B = A.(cB)$

4. (*Positividade*): $A.A > 0$ se $A \neq O$

5. $A.A = 0$ se, e somente se, $A = O$.

[5]

Exercício 2.19. Se A e B são pontos de $\mathbb{R}^n$, a *distância* de A para B é denotada por $d(A,B)$ e definida pela equação

$$d(A,B) = \|A-B\|.$$

Prove que a *distância* assim definida satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(A,B) = d(B,A)$

2. $d(A,B) = 0$ se, e somente se, $A = B$.

3. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

[5] A *Desigualdade de Cauchy-Scwarz* vale para este novo *produto interno*?