LISTA DE EXERCÍCIOS 1 - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Guidorizzi vol. 3 e Apostol vol.2.

Exercício 1. (Guidorizzi seção 6.1 exercício 1) Calcule as integrais de linha $\int f.d\alpha$, em que
a) $f(x,y,z) = (x,y,z)$ e $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), t)$, $0 \le t \le 2\pi$.
b) $f(x,y,z) = (0,0,x+y+z)$ e $\alpha(t) = \left(t,t,1-t^2\right)$, $0 \le t \le 1$.
c) $f(x,y) = \left(0,x^2\right)$ e $\alpha(t) = \left(t^2,3\right)$, $-1 \le t \le 1$.
d) $f(x,y) = \left(x^2, x-y\right)$ e $\alpha(t) = (t, sen(t))$, $0 \le t \le \pi$.
e) $f(x,y,z) = \left(x^2,y^2,z^2\right)$ e $\alpha(t) = (2cos(t), 3sen(t), t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Exercício 2. (Guidorizzi seção 6.1 exercício 4) Uma partícula se desloca num campo de forças $f(x,y,z) = (-y,x,z)$. Calcule o trabalho entre os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$, em que
a) $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), t)$, $a = 0$ e $b = 2\pi$.
b) $\alpha(t) = (2t+1, t-1, t)$, $a = 1$ e $b = 2$.
c) $\alpha(t) = (cos(t), 0, sen(t))$, $a = 0$ e $b = 2\pi$.

Exercício 3. (Guidorizzi seção 6.1 exercício 5, 6 e 7) Seja $E(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y)$. Calcule a Integral de linha $\int E.d\alpha$ no caso em que
a) $\alpha(t) = (t,1)$, $-1 \le t \le 1$
b) $\alpha(t) = \left(t, 1-t^4\right)$, $-1 \le t \le 1$
c) $\alpha(t) = (2cos(t), sen(t))$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

Exercício 4. (Guidorizzi seção 6.2 exercício 1, 2, 5, 7, 10) Calcule as seguintes integrais de linha
a) $\int_\gamma xdx + ydy$, em que $\gamma(t) = \left(t^2, sen(t)\right)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
b) $\int_\gamma xdx - ydy$, em que γ é o seguimento de reta que começa em $(1,1)$ e termina em $(2,3)$.
c) $\int_\gamma dx + xydy + zdz$, em que γ é a intersecção de $x^2+y^2+z^2 = 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ com o plano $y = x$. O sentido é do ponto $(0,0,\sqrt{2})$ até o ponto $(1,1,0)$.
d) $\int_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2}dy$, em que γ percorre a elipse $4x^2+y^2$ completa no sentido anti-horário.
e) $\int_\gamma dx + dy + dz$, em que γ é a intersecção entre as superfícies $y = x^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ e $z \ge 0$, sendo o sentido do ponto $(1,1,0)$ até o ponto $(0,0,2)$.

Exercício 5. (Guidorizzi seção 6.2 exercício 8) Seja $\gamma(t) = (Rcos(t), Rsen(t))$, $0 \le t \le 2\pi$, $R > 0$. Mostre que $\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ não depende de R.

Exercício 6. (Guidorizzi seção 6.3 exercício 1) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ contínua. Justifique as igualdades.
a) $\int f.d\gamma_1 = \int f.d\gamma_2$, em que $\gamma_1(t) = (t,t^2)$, $0 \le t \le 1$ e $\gamma_2(t) = (\frac{u}{2}, \frac{u^2}{4})$, $0 \le u \le 2$.
b) $\int f.d\gamma_1 = \int f.d\gamma_2$, em que $\gamma_1(t) = (cos(t), sen(t))$, $0 \le t \le 2\pi$ e $\gamma_2(t) = (cos(2u), sen(2u))$, $0 \le u \le \pi$.
c) $\int f.d\gamma_1 = -\int f.d\gamma_2$, em que $\gamma_1(t) = (cos(t), sen(t))$, $0 \le t \le 2\pi$ e $\gamma_2(t) = (cos(2\pi-u), sen(2\pi-u))$, $0 \le u \le 2\pi$.
d) $\int f.d\gamma_1 = -\int f.d\gamma_2$, em que $\gamma_1(t) = (t,t^3)$, $-1 \le t \le 1$ e $\gamma_2(t) = (1-u, (1-u)^3)$, $0 \le u \le 2$.

Exercício 7. (Guidorizzi seção 6.3 exercício 2) Seja $f; \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo contínuo. Sejam $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [c,d] \to \Omega$ duas curvas de classe C^1 tais que $Im(\gamma_1) = Im(\gamma_2)$. A afirmação

$$\int f.d\gamma_1 = \int f.d\gamma_2 \quad \text{ou} \quad \int f.d\gamma_1 = -\int f.d\gamma_2$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

Exercício 8. (Guidorizzi seção 6.4 exercício 5) Calcule $\int_\gamma y^2dx + xdy - dz$, em que γé a poligonal de vértices $A_0 = (0,0,0)$, $A_1 = (1,1,1)$ e $A_2 = (1,1,0)$ orientada de A_0 a A_2.

Exercício 9. (Guidorizzi seção 6.4 exercício 8) Seja B o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, γ a fronteira orientada no sentido anti-horário. Verifique que

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

em que P e Q são de classe C^1 num aberto que contém B. (Dica: Calcule $\int\int_B \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$ fixando inicialmente y e $-\int\int_B \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ fixando inicialmente x)

Exercício 10. (Guidorizzi seção 6.4 exercício 9) Verifique a relação anterior supondo que B é o quadrado de vértices $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ e $(1,1)$ e γ está orientado no sentido anti-horário.

Exercício 11. (Guidorizzi seção 6.5 exercício 2, 3) Calcule a massa do fio γ com densidade δ nos seguintes casos:
a) $\gamma(t) = (t, 2t, 3t)$, $0 \le t \le 1$ e $\delta(x,y,z) = x + y + z$.
b) $\gamma(t) = (cos(t), sen(t), t)$, $0 \le t \le \pi$ e $\delta(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exercício 12. (Guidorizzi seção 6.5 exercício 8) O centro de massa de um fio descrito pelo caminho $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ é o vetor $\left(x^C, y^C, z^C\right)$ definido como

$$x^C = \frac{\int_\alpha xdm}{\int_\alpha dm}, \quad y^C = \frac{\int_\alpha ydm}{\int_\alpha dm}, \quad z^C = \frac{\int_\alpha zdm}{\int_\alpha dm},$$

em que $dm = \delta(x,y,z)\, ds$. A função δ indica a densidade do fio e ds indica que a integral é sobre o comprimento de arco. Calcule o centro de massa nos caso em que $\delta(x,y,z)$ é igual a uma constante e o caminho são definidos abaixo:
a) $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), t)$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
b) $\alpha(t) = \left(t, t^2, 0\right)$, $-1 \le t \le 1$.

Exercício 13. (Guidorizzi seção 7.1 exercício 1) O campo vetorial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dado é conservativo? Justifique.
a) $f(x,y,z,w) = (x,y,z,w)$.
b) $f(x,y) = (y,x)$
c) $f(x,y,z) = \left(x - y, x + y + z, z^2\right)$
d) $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right)$
e) $f(x,y,z) = (x,y,z)$

Exercício 14. (Guidorizzi seção 7.1 exercício 2) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial dado por

$$f(x,y,z) = g(r)\frac{\overrightarrow{r}}{r},$$

em que $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ e $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$.. Prove que f é conservativo. (Dica mostre que se φ é uma primitiva de g, então $f = \nabla(\varphi(r))$.

Exercício 15. (Guidorizzi seção 7.2 exercício 2) Mostre que existem m e n para os quais o campo abaixo é conservativo

$$\left(3x^{m+1}y^{n+1}, 2x^{m+2}y^n\right)$$

Exercício 16. (Guidorizzi seção 7.3 exercício 1) Calcule
a) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} ydx + xdy$
b) $\int_\gamma ydx + x^2dy$, em que γ é o segmento de reta que vai de $(1,1)$ até $(2,2)$.
c) $\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, em que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva C^1 por partes contida no semiplano $y > 0$ tal que $\gamma(0) = (1,1)$ e $\gamma(1) = (-2,3)$.
d) $\int_{(-1,0)}^{(1,0)} \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$
e) $\int_\gamma (sen(xy) + xycos(xy))\, dx + x^2cos(xy)dy$, em que $\gamma(t) = \left(t^2 - 1, t^2 + 1\right)$, $-1 \le t \le 1$.
f) $\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$, em que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva C^1 por partes contida na união dos semiplanos $y > 0$ e $x < 0$ tal que $\gamma(0) = (1,1)$ e $\gamma(1) = (-1,-1)$.

Exercício 17. (Guidorizzi seção 7.7 exercício 1) Verifique que o conjunto dado é simplesmente conexo.
a) $\Omega = \left\{\mathbb{R}^2 \setminus (x,0) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0\right\}$
b) $\Omega = \left\{\mathbb{R}^2 \setminus (0,0,z) \in \mathbb{R}^2;\ z \ge 0\right\}$
(Sugestão: Verifique que o conjunto dado é estrelado)

Exercício 18. (Guidorizzi seção 7.7 exercício 2) Seja o campo $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\,;\, z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

Prove que este campo não é simplesmente conexo.

Exercício 19. (Apostol seção 10.5 exercício 9,10,11,12) Calcule as integrais de linha abaixo:

a) $\int_\gamma \left(x^2 - 2xy\right) dx + \left(y^2 - 2xy\right) dy$, em que γ percorre a parábola $y = x^2$ dos pontos $(-2,4)$ até o ponto $(1,1)$.

b) $\int_\gamma \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, em que γ percorre uma vez o círculo $x^2+y^2 = a^2$ na direção horária.

c) $\int_\gamma \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, em que γ percorre uma vez o quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ na direção anti-horária.

d) Calcule $\int_\gamma ydx+zdy+xdz$, em que γ é o caminho da intersecção das superfícies $x+y=2$ e $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$ na direção horária quando vista da origem.

e) Calcule $\int_\gamma ydx + zdy + xdz$, em que γ é o caminho da intersecção das superfícies $z = xy$ e $x^2+y^2 = 1$ na direção anti-horária quando vista acima do plano xy.

Exercício 20. (Apostol seção 10.13 exercício 4) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1 dado por

$$f(x,y,z) = \left(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\right).$$

Mostre que se f é um campo conservativo, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$