As Principais Tendências nos Fundamentos da Geometria no Século Dezenove

Hans Freudenthal

O capítulo mais bem conhecido da história da matemática é a história da geometria não euclidiana. Ele foi estudado seriamente por especialistas e não tenho a intenção de acrescentar nada ao trabalho que realizaram. No entanto, a forma como essa geometria foi recebida é um assunto bem menos familiar. Vale a pena dizer algo sobre isso.

Gauss, que desde muito cedo (talvez a partir dos últimos anos do sec. XVIII) havia concebido a idéia de geometria não euclidiana, jamais publicou uma única palavra sobre essa sua descoberta, temendo, como afirmou, o clamor dos Beócios. Seu medo, no entanto, era infundado. Ninguem, no começo dos anos trinta (do sec. XIX) se importou com as descobertas de Lobachevsky e Bolyai não havendo assim quem alertasse os Beócios. Após a morte de Gauss houve boatos de que ele havia pesquisado esse tema. O rumor foi confirmado por sua correspôndencia com Schumacher, publicada entre 1860 e 1868. Mas nem mesmo o nome de Gauss foi incentivo suficiênte para despertar interesse no estudo das geometrias não euclidianas.

A recepção da geometria não euclidiana começou com tres eventos quase simultâneos: o artigo "Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grund liegen" [1] (1868), a interpretação de Beltrami da geometria não euclidiana na geometria diferencial, e as traduções e reedicões de textos de geometria não euclidiana (a partir de 1866) por J. Houël O artigo de Riemann "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde ligen" [2] (1954; publicado pela primeira vez em 1867) infelizmente não faz parte deste contexto histórico, em primeiro lugar, porque, estranhamente, não menciona a geometria não euclidiana mas principalmente porque durante mais de trinta anos as contribuições de Riemann sobre os fundamentos da geometria foram ofuscadas

[1] Sobre os fatos que fundamentam a geometria

[2] Sobre as hipóteses sobre as quais se fundamenta a geometria

pelas de Helmholtz. Os Beócios - gente vaidosa que afirma ser capaz de provar que Gauss, Riemann e Helmholtz são pessoas estupidas - não aparecem até meados dos anos setenta (sec.XIX). Quem testemunhou a batalha de Einstein nos anos vinte (sec. XX) conhece esse tipo de literatura humorística. O nome dessa nova ciência parece ser metamatemática ou metageometria e o objetivo principal é algo que está para a matemática respeitável assim como a metafísica está para a física. O conhecimento que a maior parte dessas pessoas tem sobre essa metaciência é quase nulo e resume-se a acreditar que retas paralelas se encontram e o espaço tem mais do que tres dimensões. Apesar disso as exposições populares de Helmholtz (principalmente sua brilhante exposição de 1870) parecem ter impressionado o público. São propagadas por filósofos como Benno Erdmann que transforma o sabor e concisão de Helmholtz em prolixidade e insipidez filosófica.

Após 1868, os matemáticos sabem que a geometria não euclidiana existe. Um deles era F. Klein que (em 1870) descobriu no famoso artigo de Cayley " Sixth Memoir upon quantics" [3] (1859) um modelo de geometria não euclidiana. No entanto, esta descoberta não contribuiu para para esclarecer os fundamentos da geometria. É claro que um modelo interessante como esse é uma ferramenta agradavel de se trabalhar. Mas naquela época as pessoas, inclusive Klein, não entendiam a função lógica de um modelo. Ele afirmava não constituir um círculo vicioso fundamentar a geometria não euclidiana na geometria projetiva que por sua vez havia sido fundamentada na geometria euclideana. Mas ele mesmo nunca conseguiu entender inteiramente esse fato. A lógica da geometria foi mais obscurecida do que esclarecida pela descoberta de um modelo de geometria não euclidiana.

No trabalho de Klein as geometrias projetiva e não euclidiana se encontram. A mudança do enfoque euclideano para o projetivo, ocorrida no início do século XIX, foi um dos pressupostos históricos para a axiomatização que a geometria atingiria no final do século. A geometria euclidiana é uma estrutura complexa. Enquanto o pensamento axiomático não se tornasse um hábito não seria fácil construir um sistema axiomático para ela. Na geometria projetiva, no entanto, essa diversidade de relações geométricas é reduzida a apenas uma, a relação de incidência, embora num exame mais cuidadoso, uma segunda, a relação de ordem, se mostre indispensável.

Num certo momento G. K. Ch. von Staud em sua "Geometrie der Lage" [4]

[3] Sexta memória sobre quantics

[4] Geometria de Posição

(1847) parece ter alcançado a meta de uma geometria (projetiva) puramente dedutiva. Em nenhum momento ela faz uso de relações métricas. A noção de conjugação harmônica é definida utilizando apenas a relação de incidência (teorema do quadrângulo completo). Define-se as transformações projetivas como aquelas que preservam retas e as relações harmônicas. Através desse artifício de aparência moderna ele obtem o teorema fundamental da geometria projetiva que se revela um resultado decisivo no assunto.

F. Klein (1873) foi o primeiro a perceber a forma disfarçada em que suposições de continuidade aparecem na prova de von Staud na qual propriedades de densidade da rede harmônica são atribuidas à reta. Klein não foi capaz de preencher esta lacuna ou mesmo entender a verdadeira natureza do problema. Ele retorna várias vezes a esse ponto. Tudo que escreve sobre isso é muito confuso. Ele não distingue de maneira adequada as noções de continuidade e de monotonia. Confunde tambem as noções de continuidade como propriedade de funções e como propriedade de números reais (esse conceito é hoje conhecido com o nome de conexão).

Para Klein a reta, o plano e o espaço eram, da mesma forma que para Helmholtz e Riemann, “variedades”. Ele não foi capaz de formular as propriedades topológicas dessas estruturas de nenhuma outra forma. Esta é uma das razões que levaram muitos dos seus contemporâneos a considerar a forma com que fundamentou as geometrias projetiva e não euclidiana como um círculo vicioso: começa-se, diziam eles, com uma variedade, mas através dela já se presupõe o espaço euclidiano. É claro que Klein estava certo, mas mesmo depois de Pasch e Hilbert ele nunca entendeu realmente que é possível dispensar a noção de variedade nos *Fundamentos de Geometria*.

Esse é um fato estranho. Desde 1871 e 1872 Dedekind e Cantor tinham, de forma independente, conseguido analisar e entender o continuum numérico. É claro que o continuum geométrico era um problema mais difícil uma vez que a densidade da rede racional que é evidente na análise, tem que ser estabelecida por meio axiomático na geometria. Essa é a essência do assim chamado axioma de Arquimedes. No começo dos anos oitenta (sec. XIX) Pasch e O. Stolz, acredito que de forma independente, tinham percebido seu real significado.

Nos anos noventa (sec. XIX) a continuidade em geometria foi iluminada pelo aparecimento de sua contrapartida. Dos trabalhos caóticos de G. Veronese emergiram as geometrias não arquimedianas que foram estudadas de forma mais precisa por T. Levi-Civita. O que isso significou pode ser inferido pela reação de Klein que em 1898 ainda estava preso a noção de variedade de números como substrato da geometria.

Originalmente, nem a geometria projetiva nem a geometria não euclidiana pertenciam a "família dos fundamentos" no sentido de se constituirem numa investigação consciente sobre a essência do espaço. Essa problemática é característica de uma terceira corrente, pesadamente carregada de filosofia. Para resenh́-la adequadamente deveriamos começar por Kant ou até mesmo por Newton e Leibniz. A luta contra e a favor da geometria não euclidiana no século dezenove se desenvolve tendo como pano de fundo a doutrina de Kant sobre o espaço, ou melhor, um resumo superficial, que até hoje aparece nos livros como sendo a doutrina de Kant.

A revindicação da verdade apriorística da geometria não ajuda a compreensão da geometria ou da lógica. Não tenho condições de decidir se a autoridade de Kant dificultou ou não as investigações sobre os fundamentos. De qualquer forma, é evidente que Riemann rejeitou Kant. Ele havia estudado cuidadosamente Herbart que tinha sido o primeiro a observar que psicologicamente o topológico precede o espaço euclidiano. De acordo com Riemann o substrato psicológico da geometria é uma variedade n-dimensional. Se existe algum *a priori* formal no espaço, ele é a topologia. Como a topologia é uma estrutura muito pobre, algo provindo da experiência deve ser adicionado. Esse algo é "Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen"[5], falando matematicamente, a métrica riemanniana.

Como psicólogo da percepção Helmholtz apreciava Kant, mas como matemático o rejeitava. Ele tinha uma teoria matemática do espaço independente da teoria de Riemann. Usava, contra Riemann o argumento: toda métrica espacial depende da observação da congruência e a congruência pressupõe a existência de corpos sólidos que se movem livremente. Essa existência é o "fato" (contrário a hipótese de Riemann) a que ele faz referência no título do seu trabalho "Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen". Partindo da variedade e acrescentando esse fato como postulado ele consegue provar que o espaço ter que ser ou euclidiano ou não euclidiano. Como subproduto de sua teoria, Riemann já havia provado a mesma coisa, mas com hipóteses mais fortes e apenas em espaços riemannianos, enquanto Helmholtz não supõe o carater pitagórico da metrica.

É claro que a suposição de helmholtz de que corpos sólidos são indispensáveis para se poder comparar distâncias é incorreta. Réguas ou sólidos

[5] Hipóteses sobre as quais se fundamenta a geometria. Trabalho fundamental de Riemann

unidimensionais, como é o caso delas, são suficientes. No entanto, a objeção de Helmholtz é continuamente repetida, não apenas por filósofos como Erdmann, mas tambem por Poincaré que, em 1902, em sua resenha dos *Fundamentos da Geometria* de Hilbert criticou a afirmação de Helmholtz que, por trinta anos, havia desviado a atenção dos geometras do trabalho de Riemann.

No século dezenove não havia trocas de idéias matemáticas entre os paises europeus. As barreiras linguísticas eram muito fortes. A animada discussão dos fundamentos da geometria que ocorreu, a partir dos anos trinta na Alemanha não afetou, até os anos noventa (sec. XIX), a França. O ensaio filosófico de Poincaré que apareceu em 1891 na revista *Revue générale des sciences pures et appliquées* parece que causou tremenda sensação embora Poincaré não tenha, nesse artigo, ido essencialmente além de Helmholtz. O ensaio foi imediatamente reproduzido pela revista *Nature*.

A publicação de Poincaré ocorreu na época correta. Inseriu-se numa corrente de enorme interesse em filosofia crítica - nesses mesmos anos a revista *Revue de Metaphysique et Morale* foi fundada. Essa era a arena que nos anos noventa (sec.XIX) Poincaré, Russel, Couturat, Frege e muitos outros discutiam os fundamentos da matemática. Pode-se acrescentar ainda a introdução das idéias de Cantor e de Dedekind e no final dos anos noventa tambem o nome de Peano foi mencionado num artigo de Couturat. A geometria, principal assunto em discussão, era ainda tratada da mesma forma que em 1870. Nada do que tinha acontecido na Alemanha e na Itália havia cruzado as fronteiras linguísticas. Uma contribuição muito divertida a essa discussão é o livro *An essay on the Fundations of Geometry* (1897) [6]. Esse livro foi recentemente reeditado após sessenta anos.

Alguem - que eu não sei precisar quem é - definiu um filósofo como um homem que, à meia noite, num quarto escuro, procura um gato preto que não está lá. Tendo em mente esses filósofos dos anos noventa, gostaria de acrescentar: enquanto isso, o gato está à plena luz, no quarto ao lado.

Então a porta se abre - quero dizer, a porta do Congresso Filosófico de Paris em 1900. No campo da filosofia das ciências a falange italiana é suprema: Peano, Burali-Forti, Padoa, Pieri dominam de forma absoluta a discussão. Para Russel, que apresentou um artigo filosófico no pior sentido do termo, Paris foi a estrada de Damasco.

O que ocorreu no decorrer desse tempo? Pensa-se que Hilbert foi o primeiro a construir um sistema lógico fechado para a geometria euclidiana que

[6] Uma Ensaio Sobre os Fundamentos da Geometria

evita qualquer apelo ilegal à intuição. O trabalho de Pasch "*Vorlesungen über neuere Geometrie*" (1882)[7] contradiz essa crença. Após algumas páginas, o leitor desse livro percebe que Pasch vai, escrupulosamente, realizando seu programa: "sempre que a geometria precisa ser realmente dedutiva o processo de inferência deve ser independente do *significado* das noções e das figuras geométricas. As únicas coisas que importam são as *relações* entre as noções geométricas, da forma que elas são estabelecidas pelas definições e teoremas".

Esse programa poderia ter sido formulado antes de Pasch e, em alguns casos foi, mas ninguem nunca antes pensou em levá-lo adiante. Como geometra dedutivo, Pasch tinha contempoaâneos e competidores como O. Stolz e F. Schur, porem não tinha precursores. Os italianos Veronese, Enriques, Pieri, e Padoa foram influenciados por ele e estou certo que o trabalho de Peano em logística deve muito a Pasch que foi o primeiro a mostrar como formular axiomas.

Desde os tempos antigos considera-se um axioma como uma verdade evidente que não pode nem deve ser provada. Isso significava, principalmente, que que os axiomas não precisavam nem mesmo ser formulados. Muita gente (especialmente Klein) falava continuamente em axiomas geométricos sem nunca mencionar explicitamente um único desses axiomas. Se alguem apontasse uma lacuna numa prova geométrica provavelmente ouviria como resposta: "Ah, isso é apenas um axioma". Esse é um dos contextos usuais da palavra "axioma".

O livro de Pasch é um sistema axiomático da geometria projetiva, exatamente o tema em que von Staudt havia falhado. Na mesma época Cantor e Dedekind haviam mostrado como atacar o continuum.

Até o final do século (sec. XIX) o trabalho de Pasch foi continuado principalmente pelos italianos. Já mencionei a descoberta das geometrias não arquimedianas. As geometrias finitas apareceram na mesma época (G. Fano, 1892; E.H. Moore, 1896). Muito antes, Klein já havia concebido a geometria não desarguesiana, faltando lhe apenas o nome certo.

Apesar disso é grande a distância entre Pasch e Hilbert cujos *Grundlagen der Geometrie*[8] foi publicado pela primeira vez em 1899. O progresso provavelmente teria sido menos marcante se Pasch não houvesse publicado, no começo do século XX, um grande número de longos artigos filosóficos

[7] Lições Sobre a Nova Geometria

[8] Fundamentos da Geometria

expondo idéias dolorosamente contrastantes com as de Hilbert. Enquanto Pasch se mostrava ancioso para derivar as noções fundamentais a partir da experiência e não postular mais do que a experiência pode oferecer, Hilbert começa afirmando: "Wir denken uns ... imaginamos tres espécies de coisas ... chamadas pontos ... retas ... planos imaginamos relações entre pontos, retas e planos que chamaremos de incidência, estar entre (ordem), paralelismo e congruência ... ".

Como afirmamos, desde muito tempo se considera um axioma como uma verdade que não pode nem deve ser provada. Os que não gostavam das evidências chamavam um axioma de postulado ou falavam em hipóteses (Riemann) ou em fatos (Helmholtz). Um assunto que causou muita controvérsia é se os axiomas derivam da pura intuição (Kant), se são idealizados pela experiência (Helmholtz), se são julgamentos hipotéticos sobre a realidade (Riemann) ou se são afirmações que transcendem a realidade (Klein). De qualquer forma, a geometria trata do espaço - Pasch, Enriques, Veronesi, Pieri e Klein enfatizaram isso e, na décima primeira hora (1897), Russel escreveu sua filosofia *Foundations of Geometry* que revela leves pegadas de Kant e não a pata do lẽao.

" Wir denken uns" o vínculo com a realidade é cortado. A geometria se tornou matemática pura. A questão de como e onde aplicá-la é a mesma que em outros ramos da matemática. Axiomas não são verdades evidentes. Eles simplesmente não são verdades no sentido usual.

É claro que após o sério trabalho de Pasch sobre dedutibilidade e com a posterior descoberta das geometrias não desarguesianas, não arquimedianas e finitas essa idéia (de que a geometria trata apenas do espaço físico) estava superada. G. Fano, um precursor de Hilbert começa um de seus artigos (Giornale di Mat.,vol 30, pp 106-132) pressagiando as palavras de hilbert citadas acima. Dois outros italianos, Padoa e Pieri estão, nesse ponto, competindo com Hilbert. A conferência de Pieri no Congresso de Filosofia de Paris em 1900 tem um título muito significativo " Sur la géometrie envisagée comme un système puremente logique"[9]; Padoa apresentou dois trabalhos nos quais o status lógico da geometria é discutido e são esquematizados esboços axiomáticos mais claros e precisos do que Hilbert jamais havia feito.

O que fora expressamente formulado por Padoa estava, no trabalho de Hilbert, ligado com fatos matematicamente importantes, isto é, a idéia de definição implicita, um mostro lógico e um incomodo para muitas pessoas da

[9]Sobre a Geometria Concebida Como um Sistema Puramente Lógico

época. Hilbert nunca usa o termo “definição implicita”. Mas ele introduz os axiomas de ordem com a afirmação “os axiomas desse grupo definem a noção de estar entre”. E novamente, com os axiomas de congruência: “os axiomas desse grupo definem a noção de congruência ou movimento”. Pode-se traçar a origem dessa idéia ao contexto de 1894 mas, naquela época, ninguem prestava atenção a ela.

O significado das noções indefinidas como ponto, reta, plano, incidência, entre, congruênte é implicitamente definido pelos axiomas, por regras como as que nos dizem como jogar um jogo. Tolice, objetavam as pessoas, pois se transformarmos o espaço euclidiano em si mesmo por uma inversão as retas e planos são substituidos por circunferências e esferas que satisfazem os mesmos axiomas embora sejam muito diferentes de retas e planos, o que prova que os axiomas não definem as noções com que lidamos.

Frege, contestando Hilbert como um escolar, tambem se junta aos Beocios. (Eu nunca entendi porque Frege é tão admirado hoje em dia). O seu sistema de axiomas, diz ele a Hilbert, é como um sistema de equações que voce não pode resolver. “ Se tivvermos que decidir se um objeto, digamos meu relógio, é um ponto, ja somos frustrados pelo primeiro axioma que considera dois pontos . . . ”. Frege parodia o sistema de Hilbert:

“Erklarung. Wir denken uns Gegenstände, die wir Götten nennen. Axiom1. Jeder Gott is almächtig. Axiom2. Es gibt wenigstens einen Gott”. [10]

Dificilmente Frege poderia inventar uma demonstração mais efetiva. Antes de Hilbert os matemáticos se comportavam como se pudessem atraves da matemática se o relógio de Frege é ou não um ponto. Sistemas axiomáticos como os da caricatura de Frege existiram (Os de Spinoza e muitos outros) enquanto se acreditou que a geometria pudesse afirmar alguma coisa sobre o mundo real.

No final, prevaleceu o ponto de vista de Hilbert. A geração mais jovem estava agradecida por ter se livrado de definições como as de Euclides “ Um ponto é o que não tem partes” e “uma unidade é aquilo de acordo com o que tudo é chamado de um”. A clara distinção feita por Hilbert entre a matemática e as ciências do real tornou-se paradigma para uma nova metodologia. Por meio do livreto de Einstein “Über die spezielle uns allgemeine Relativitätstheorie”[11] essa doutrina fez seu caminho atraves dos lobbies da

[10] “Proposição. Imaginamos uma coisa que chamamos Deus. Axioma1. Todo Deus é onipotente. Axioma2. Existe pelo menos um Deus.”

[11] Sobre as Teorias Especial e Geral da Relatividade

ciência e da filosofia. Algumas sentenças cunhadas por ele para sua conferência “Geometrie und Erfahrung” tornaram-se clássicas: Na medida em que os teoremas da matemática se referem à realidade, eles não são certos e, na medida em que são certos, não se referem à realidade ... O progresso proporcionado pela axiomática consiste numa nítida separação da forma lógica e o conteudo real ou intuitivo ... Os axiomas são criações voluntárias da mente humana ... Dou muita importância a essa interpretação da geometria porque se não a conhecesse nunca teria sido capaz de desenvolver a teoria da relatividade”

Numa longa resenha da oitava edição dos **grundlagen** de Hilbert analisei detalhadamente seu trabalho. [12] Identifiquei precursores e competidores. A medida que fui descobrindo pude ir distinguindo com maior clareza o que era historicamente decisivo no trabalho de Hilbert. O pai do rigor em geometria é Pasch. A idéia do status lógico ocorreu ao mesmo tempo a alguns italianos. A idéia de definição implícita foi analisada muito antes por Gergonne. A prova da independência por contra exemplo foi praticada pelos inventores da geometria não euclidiana e, de maneira mais consciente, por Peano e Padoa. O cálculo com segmentos foi prefigurado em von Staudt “throw calculus”. O significado do “Schliessungssätze” foi compreendido por H. Wiener (1893). Até mesmo o título **Gundlagen der Geometrie**[13] esta longe de ser original. Antes de Hilbert um nome como esse indicava pesquisa da do tipo de Riemann ou Helmholtz. Os artigos de Lie de 1890 apareceram com esse título o mesmo acontecendo com o livro de Killing em 1893 e 1897. Expliquei tambem, em minha resenha, porque, apesar de todos esses fatos históricos, estamos acostumados a identificar a transformação da matemática em axiomática com os **Grunlagen** de Hilbert: esse trabalho artesanal e extremamente elaborado de axiomática é infinitamente mais persuasivo do que especulações programáticas e filosóficas sobre axiomas e o espaço jamais poderiam ser.

Há um nome nos *Fundamentos da Geometria* que quase negligenciei: Poincaré. Ao ler-se o capítulo sobre geometria em *La Science et l”Hypotèse* (1903?), respira-se, sem dúvida, o ar dos *Grundlagen* de Hilbert (1899), do espírito moderno da axiomática, embora se possa talvez perguntar porque o nome de Hilbert não é mencionado. Isso me fez ficar muito surpreso quando encontrei a primeira edição, publicada em 1891, um bom número de anos an-

[12] Nieuw Archive voor Wiskunde (4) 5 (1957), 105-142

[13] Fundamentos da geometria

tes dos *Grundlagen* de Hilbert. (A maior parte de *La Science et L'Hypotèse* é uma reedição quase textual de ensáios publicados em revistas nos anos noventa (sec. XIX)). É verdade que Poincaré havia, em importantes pontos, a antecipado Hilbert?

Minha surpresa aumentou quando li todos os outros artigos de Poincaré

e as controversias que eles causaram. Pareceu-me que as reflexões de Poincarè não tinham quase nada a ver com a pesquisa sobre o status lógico da geometra embora, depois dos *Grundlagen* elas tenham prontamente sido interpretadas assim. Devo confessar que essa foi para mim uma experiência desconcertante. Historiadores que acreditam que, lendo um trabalho isoladamente de seu contexto e numa edição mais recente ou talvez mesmo traduzida para uma outra linguagem, podem entender um filósofo, devem se acautelar. Num outro contexto, um livro inteiro pode adquirir um significado totalmente diferente - como foi o caso de it La Science et l'Hypotése. Não posso aduzir aqui as longas citações atraves das quais estabeleci, em outro lugar, a prova dessa tese. Posso apresentar apenas um resumo desses resultados.

Nos *Fundamentos da Geometria*, Poincaré apoiou-se muito em Helmholtz. Com Helmholtz, inicialmente rejeitou Riemann. É visível que não conhecia nada de Pasch nem dos italianos. Sua contribuição matemática para os *Fundamentos da Geometria* é insignificante. Sua produção filosófica, que se iniciou em 1891, é mais abundante.

Nem uma vez siquer, em nenhum desses artigos, Poincaré trata do problema que ocupou os matemáticos a partir de Pasch: encontrar um lugar para a geometria na matemática pura. Embora Poincaré faça clara distinção entre os continuos matematico e físico, ele nunca usa esses adjetivos quando fala de geometria. Nunca se sabe quando usa as palavras espaço, ponto e reta se o faz num sentido matemático ou físico. Poincaré via a geometria como uma ciência natural, usando métodos matemáticos como se fosse mecânica, termodinâmica ou eletricidade. Em seu livro, todas as ciências são forçadas a se conformarem a um mesmo padrão, diferente da aritmética, cujos juizos, de acordo com Poincaré, são *a priori.* Fal muito em axiomas sem citar nenhum. Algumas vezes axioma, em sua terminologia, significa qualquer coisa que o geómetra utiliza sem prova. Em outras ocasiões ele, presumivelmente, tinha em mente axiomas de algum livro texto ou ainda o que Helmholtz chamava de "fatos". A idéia de Pasch de sistematização axiomática e rigor na dedução ainda não havia atingido Poincaré.

Talvez voçe saiba que, de acordo com Poincaré, os axiomas geométricos (quais?) são convenções. Originalmente isso era uma metáfora. Mas, gradualmente, ele passa a gostar do termo e no fim ele passa a chamar toda proposição teórica da ciência de convenção ou mesmo, conenção linguística. Para evitar inconsistências ele muda de uma convenção para outra. De acordo com o método usado final, aplicado em *La Science et l'Hypotèse*, afirmar que Napoleão nasceu em 1789 em Ajaccio seria uma convenção linguística porque é um procedimento arbitário contar os anos a partir do nascimento de Jesus Cristo, chamar Napoleão de Napoleão e não de Wellington, e Ajaccio de Ajaccio e não de Roma.

Quando em *Fundamentos da Geometria* aparece a palavra "convenção" lembramo-nos imediatamente dos *Grundlagen* de Hilbert. A partir dele, um sistema axiomático tem sido, frequentemente, comparado a um jogo que se joga de acordo com regras convencionalmente estabelecidas. Mas ao usar essa imagem, estamos considerando a geometria como algo desvinculado do espaço real. No entanto, se considerarmos a geometria uma ciência física, a afirmação de que seus axiomas são convenções não faz mais sentido do que a afirmação mais geral de que todas as afirmações da física são convenções e portanto, até onde consigo ver, não faz nenhum sentido.

Quando originalmente usada, a palavra convenção não acarretava nada mais do que a existência de varias espécies de geometria e tambem que nenhuma delas é mais verdadeira do que as outras. Isso é o que Poincaré aprendeu com Helmholtz; e essa afirmação não almeja muito alem do que Helmholtz pretendia. A conceito de geometria é de Poincaré é estremamente restrito. Ele não admite nenhuma outra escolha alem das geometrias euclidiana e não euclidiana. Repetidamente enfatiza: " Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature il n'y aurait pas de géométrie"[14]. Essa é a verdadeira substância das objeções que Helmholtz fez a Riemann, e mostra o quão distante Poincaré ainda estava da concepção de Hilbert do status lógico da geometria. Para Poincaré a homogeneidade do espaço era necessária e ele até mesmo tentou provar isso em um dos seus artigos. Na verdade, o único fato que Poincaré considerava convencional era o valor da curvatura do espaço. Nunca ocorreu para ele, antes de ler Hilbert que havia mais axiomas que pudessem ser suprimidos. Cada linha de sua resenha dos *Grundlagen*[15] revela sua surpresa. Estava surpreso porque não sabia o que havia acontecido nos últimos trinta anos. De repente, ficou sabendo da existência de uma variedade muito maior de geometrias do que as que ele conhecia. Ele admitia

[14]Portanto, se não existisse na natureza corpos sólidos, não haveria geometria.

[15]*Bull. Sci. math (2) 26(1902), 249–272*

os espaços de Riemann e havia descoberto o paralogismo do argumento que Helmholtz usou contra Riemann. Havia incorporado tão entusiasticamente a idéia de dedução rigorosa em geometria que chegou a afirmar: "On pourrait confier les axiomes a une machine à raisonner, ... et l'on verrait sortir toute la Géométrie"[16]. E, finalmente, ele tomou conhecimento das iéias dos italianos como eles as espuseram em Paris.

Não há melhor evidência da capacidade dos *Grundlagen* em mostrar o poder de persuasão de uma filosofia que não é imposta como um programa, mas é apenas o fundo silencioso de uma obra prima de artesanato. " Exempla trahunt"[17]. Esse grande sucesso só foi concedido a Hilbert em geometria. Ele inicia os *Foundations of mathematics* na outra extremidade, como um programa - um programa, como diz Padoa em 1900, quimérico.

Esse dito "Exempla trahunt" tambem caracteriza os *Principia Mathematica* [18] de Russel e Whitehead, tambem um trabalho dominante, embora menos profundo do que o de Hilbert.

O triunfo dos matemáticos italianos foi uma vitória de Pirro. Após os *Grundlagen der Geometrie* eles deixaram de trabalhar nos fundamentos da geometria e, após os *Principia Mathematica*, deram adeus à logística.

Referências

[1] Thomas Heath, *EUCLIDE The thirteen Books of THE ELEMENTS.*

Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath , DOVER.

[16]Pode-se introduzir os axiomas numa máquina de calcular, ... e se verá aparecer toda a geometria.

[17]Os exemplos cativam.

[18]Princípios de Matemática