As Coisas que Ensinamos

RPM 03

## Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos

*Zoroastro Azambuja Filho*

Por intermédio de um colega, tomei conhecimento do artigo intitulado "O Teorema de Euler sobre poliedros", escrito pelo Professor Elon Lages Lima e publicado no número de outubro de 1982 do "Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática".

Sou professor de Matemática e já perdi a conta do número de vezes que demonstrei - ou julguei tê-lo feito - em classe o Teorema de Euler para poliedros. Por isso fiquei muito chocado ao saber que a demonstração que sempre usei, e que consta de todos os livros-texto que conheço, não está certa.

Na esperança de aprender uma demonstração correta, li com grande atenção o referido artigo. Estou agora convencido de que a argumentação que eu utilizava é insuficiente. Infelizmente, a maneira sugerida pelo autor do artigo para corrigir o que ele chama "a demonstração de Cauchy" me parece excessivamente elaborada e longa para o nível dos alunos de nossos colégios. Por outro lado, num trecho do seu trabalho, o Professor Elon menciona uma demonstração particular, válida apenas para poliedros convexos, e faz referência a um livro de autores alemães, traduzido para o inglês, onde se encontra tal prova.

Consegui uma cópia xerox daquela demonstração e, depois de meditar assunto, decidi que prestaria um serviço aos meus colegas divulgando a minha maneira de ver essa prova do Teorema de Euler.

O teorema a demonstrar é o seguinte:

*Seja P um poliedro convexo com F faces. A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente* $F - A + V = 2$.

Para que não haja ambigüidade quanto aos termos que empregaremos, é conveniente relembrar algumas definições.

Um conjunto C, do plano ou do espaço, diz-se *convexo* quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C.

Um *poliedro* é uma reunião finita de polígonos convexos, chamados as *faces* do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se *arestas* do poliedro e os vértices: dos polígonos são também chamados *vértices do poliedro*. Exige-se ainda que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia.

Diz-se que um poliedro é *convexo* quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima. Cada aresta de um poliedro convexo é lado de exatamente duas faces desse poliedro. Aceitaremos este fato como parte da definição, embora saibamos que ele pode ser demonstrado a partir dela.

Para demonstrar o Teorema de Euler começamos escolhendo uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo P. Tomamos também um plano H, que não intersecta P e é perpendicular a reta r. O plano H será chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a r (logo perpendiculares a H) serão chamadas retas verticais. H divide o espaço em dois semi-espaços, um dos quais contém o poliedro P. Este será chamado o semi-espaço superior; diremos que seus pontos estão acima de H.

Para melhor ilustrar nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando à pino sobre o semi-espaço superior, de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto x do semi-espaço superior corresponde um ponto x em H, chamado a sombra de x, obtido como interseção do plano H com a reta vertical que passa por x. A sombra de qualquer conjunto X, contido no semi-plano superior é, por definição, o conjunto X', contido em H, formado pelas sombras das pontos de X.

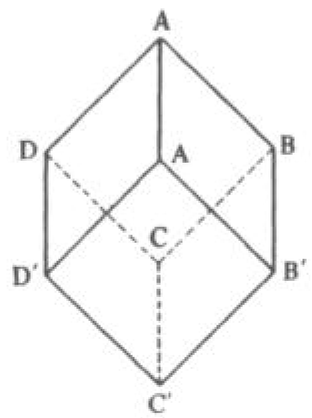
A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro P é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazia) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a P, ou é um único ponto de P. Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo P.

A observação acima pode ser reformulada do seguinte modo: cada ponto da sombra P' do poliedro P é sombra de um ou de dois pontos de P.

Ora, a sombra P' do poliedro P é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno $\gamma'$ é a sombra de uma poligonal fechada $\gamma$, formada por arestas de P. Cada ponto de $\gamma'$ é sombra de um único ponto de P (pertencente a $\gamma$). A poligonal $\gamma$ é chamada o *contorno aparente* do poliedro P. Cada ponto interior de P' (isto é, não pertencente a $\gamma'$) é sombra de 2 pontos de P. Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de H) chamaremos *ponto iluminado*; o mais baixo será chamado *sombrio*.

Assim, a poliedro P se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente $\gamma$.

Por exemplo, seja P o cubo que tem os quadrados ABCD e A'B'C'D' como faces opostas. Pendurando-o pelo vértIce A (de modo que A e C' estejam na mesma vertical), as faces AA'B'B, AA'D'D e ABCD ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal A'B'BCDD'A'.




Seja $P_1$ o conjunto dos pontos iluminados de $P$ mais o contorno aparente $y$. Cada ponto de $P'$ é a sombra de um único ponto de $P_1$ . Noutras palavras, a regra que associa a cada ponto x de $P_1$ sua sombra x' é uma correspondência biunívoca entre $P_1$ e $P'$. Usaremos a notação $P_1$ para representar o polígono P' decomposto como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em $P_1$, isto é, das faces iluminadas.

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto $P_2$ , formado pelos pontos sombrios de $P$ mais o contorno aparente $y$. A regra que associa a cada ponto $y$ de $P_2$ sua sombra y' também é uma correspondência biunívoca entre $P_2$ e $P'$. Escreveremos $P_2$ para indicar a sombra de $P_2$ expressa como reunião das sombras das faces sombrias de P, isto é, contidas em $P_2$ .

Complementaremos os preparativos para a demonstração do Teorema de Euler observando que se decompusermos cada face de P em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números F, A e V individualmente, mas a expressão F–A+V permanecerá com o mesmo valor. Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números F e A aumentam, cada um, de uma unidade e o numero V não muda. Na expressão F–A+V, os acréscimos de F e A se cancelam. Portanto, a fim de demonstrar o Teorema de Euler, não há de generalidade em supor que todas as faces do poliedro P são triângulos. Esta hipótese será feita a partir de agora.

Como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que 3F = 2A esta relação será usada logo mais.

Montando o cenário e apresentados os personagens, iniciaremos agora a ação. A idéia da demonstração consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma S dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro P.

Em primeiro lugar, há F triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a 2 ângulos retos, isto é, a p radianos. Portanto $S = \pi \cdot F$. Como F = 3F – 2 = 2A – 2F, podemos escrever:

$$S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F.$$

Por outro lado, temos $S = S_1 + S_2$, onde $S_1$ é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e $S_2$ é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

A fim de calcular $S_1$, partimos da observação super-evidente (porém crucial) de que a soma dos ângulos internos de um triangulo T é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra T'. Daí resulta que $S_1$ é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais esta decomposto o polígono convexo $P'_1$, sombra de $P_1$. Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértice a vértice, em vez de soma-lo triângulos por triangulo, como acima.

Sejam $V_1$ o numero de vértices iluminados, $V_2$, o numero de vértices sombrios e $V_0$ o numero de vértices do contorno aparente $\gamma$. Então $V = V_0 + V_1 + V_2$. Notemos ainda que $V_0$ também o número de vértices (e de lados) da poligonal $\gamma'$, contorno do polígono convexo P'.

Em $P_1$ temos $V_1$ vértices interiores (sombras dos vértices iluminados) mais $V_0$ vértices do contorno $\gamma'$. A soma dos ângulos que têm como vértices um dado vértice interior é igual a $2\pi$ radianos (4 ângulos retos). A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno $\gamma'$ é igual a $\pi\,(V_0 - 2)$, de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com $V_0$ lados. Segue-se que:

$$S_1 = 2\,\pi\,.\,V_1 + \pi\,(V_0 - 2).$$

Por um raciocínio inteiramente análogo, obteríamos:

$$S_2 = 2\,\pi\,.\,V_2 + \pi\,(V_0 - 2).$$

Somando estas duas igualdades, vem:

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi V - 4\pi$$

Comparando com a igualdade $S = 2\,\pi\,.\,A - 2\,\pi.\,F$, acima, obtida, e dividindo por $2\,\pi$, resulta que

$$A - F = V - 2,$$

ou seja,

$$F - A + V = 2,$$

como queríamos demonstrar.