Matemática Universitária

Dezembro de 1985 **Número 2**

Uma Nova Superfície Mínima 1

ENTREVISTA

Por que fazer Matemática? — A visão de Michael Atiyah 2

ARTIGOS

Jonas de Miranda Gomes, A Curvatura Média das Superfícies II 20

Noraí Romeu Rocco, Uma Nota sobre a Estrutura do Grupo Multiplicativo de um Corpo 49

Elon Lages Lima, O Teorema de Euler sobre Poliedros 57

NOTAS DE ENSINO

Geraldo Ávila, Contato de Curvas, Círculo Osculador e Integrais de Fresnel 75

Alberto de Azevedo, Uma Propriedade dos Polinômios Característicos de Transformações Ortogonais 86

RESENHA DE LIVROS

A dura tarefa de escrever livros de Matemática — Observações de Johannes Kepler 90

Jacob Zimbarg Sobrinho, A Análise Matemática 91

Uma Publicação da

Sociedade Brasileira de Matemática

O TEOREMA DE EULER SOBRE POLIEDROS

Elon Lages Lima

§1. Introdução

Este ensaio foi motivado pela leitura de Lakatos [1976], onde o Teorema de Euler é usado como tema de fundo, sobre o qual o autor expõe suas idéias a respeito das provas matemáticas. O ponto de partida daquele livro é a demonstração dada por Cauchy para o referido teorema. Embora o trabalho de Lakatos goze de merecida reputação como obra de Filosofia Matemática e contenha uma crônica minuciosa sobre a trajetória histórica do Teorema de Euler, ele de certo modo frustra a curiosidade do leitor ao deixar inacabada a análise crítica da demonstração de Cauchy. Essa análise é completada aqui. O título deste artigo bem poderia ser "Dada uma demonstração, achar o teorema que ela prova".

Nosso interesse por este assunto foi também estimulado pelo fato de que no colégio estudamos o Teorema de Euler (com a demonstração de Cauchy) e depois a vimos reproduzida por autores conceituados, como Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins numa forma aparentemente compatível com o nível do curso secundário. O presente estudo torna explícitas as condições que precisam ser admitidas a fim de que a demonstração de Cauchy seja válida e mostra que a hipótese feita por Hilbelt-Cohn Vossen e Courant-Robbins (de que o poliedro é homeomorfo a uma esfera) só permite a utilização da prova de Cauchy mediante recursos a técnicas avançadas, não mencionadas por aqueles autores.

No caso particular de poliedros convexos, há demonstrações elementares e corretas do Teorema de Euler. A primeira, e mais elegante delas, foi obtida por A.M. Legendre (veja Legendre [1846])

Nota. Uma versão preliminar deste trabalho foi publicada no "Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática". (Ano XII, Número 2, Outubro de 1982.)

com base na fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. (Veja também E. Lima [1984].) Ainda no caso de poliedros convexos, a demonstração de Legendre pode ser adaptada de modo a evitar a Geometria Esférica, tornando-se mais elementar. (Cfr. Z. Azambuja [1983].)

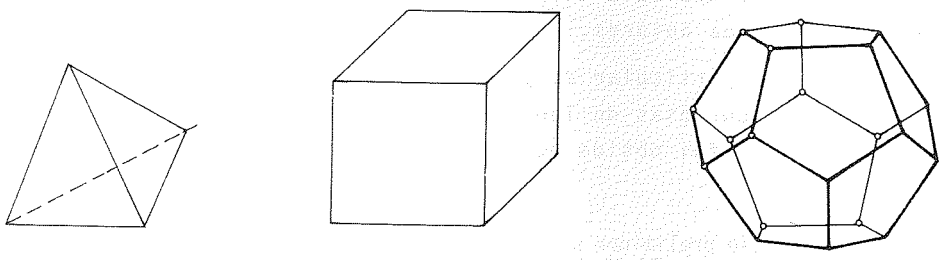
§2. Resumo histórico

O Teorema de Euler, descoberto em 1758, diz que se um poliedro tem V vértices, A arestas e F faces então $V-A+F = 2$.

Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contém resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula acima como conseqüência imediata. Mas Descartes não parece ter notado isso. O navio que trouxe para a França os pertences de Descartes, depois de sua morte em Estocolmo, naufragou no rio Sena. O baú que continha o manuscrito flutuou e foi encontrado no dia seguinte. A cópia feita por Leibniz também se perdeu, sendo reencontrada em 1860. Para um estudo detalhado do manuscrito de Descartes, veja P. Federico [1982].

A demonstração mais divulgada desse teorema no caso de poliedros homeomorfos à esfera é basicamente devida a Cauchy [1813]. Ela pode ser encontrada, por exemplo, em Courant-Robbins [1951] e Hilbert-Cohn Vossen [1956].

O Teorema de Euler tem sido ensinado, há décadas, em cursos de Geometria nas escolas secundárias. Ele tem as características



TETRAEDRO
$V-A+F = 4-6+4 = 2$

CUBO
$V-A+F = 8-12=6 = 2$

DODECAEDRO
$V-A+F = 20-30+12 = 2$

Figura 1

usuais que tornam um teorema atraente e popular; generalidade de validez, simplicidade de enunciado, demonstração elegante e inteligível. Além disso, é fácil ilustrá-lo com belos desenhos de poliedros, nos quais se constata visualmente que $V-A+F = 2$.

No entanto, o Teorema de Euler não é válido com toda a generalidade do enunciado que demos (o mesmo de Euler, que o supunha verdadeiro para todos os poliedros). Muito provavelmente Euler (o qual nunca se deu ao trabalho de definir precisamente "poliedro") não considerava como poliedros os sólidos, como o da figura 2, para os quais seu teorema é falso.

Há muito tempo se conhecem exemplos de poliedros para os quais $V-A+F \neq 2$. A figura abaixo exibe um poliedro com $V-A+F = 16-32+16 = 0$.

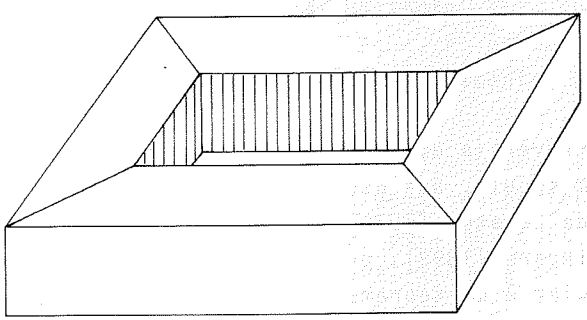


Figura 2

Várias gerações de geômetras depois de Euler se preocuparam com o problema de estabelecer a relação $V-A+F = 2$ como um verdadeiro teorema, livre dos contra-exemplos embaraçosos.

Uma saída óbvia consiste em restringir a classe dos poliedros aos quais ele se aplica. Alguns autores se limitam a poliedros convexos, isto é, poliedros situados do mesmo lado de qualquer plano que contenha uma de suas faces. Os poliedros da figura 1 são convexos, mas o da figura 2 não é.

É verdade que todo poliedro convexo satisfaz à relação de Euler mas é fácil achar exemplos de poliedros não convexos para os quais ela ainda vale. A figura 3 abaixo mostra um desses exemplos: um prisma no qual a base foi substituida pelas faces superiores de uma pirâmide.

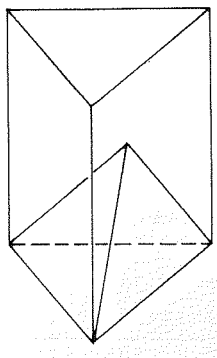


Figura 3

A controvérsia em torno do Teorema de Euler perdurou durante mais de um século. Sua história está contida nas notas de rodapé do livro de Lakatos [1976]. A solução definitiva do problema deve-se a Poincaré [1893], primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia, e não de Geometria, ao notar que o número $V-A+F$ é um *invariante topológico* do poliedro P.

Que significa esta última afirmação?

Para explicar, precisamos dar uma definição. Dizemos que duas figuras P e Q são *homeomorfas* quando existe uma transformação contínua $f:P \to Q$ cuja inversa $f^{-1}:Q \to P$ também é contínua. (Neste caso, f chama-se um *homeomorfismo* de P sobre Q.) Por exemplo, se imaginarmos cada poliedro feito de borracha e os inflarmos, injetando ar, os poliedros das figuras 1 e 3 serão transformados em esferas e o da figura 2 se tornará um toro (câmada de ar de um pneu). Assim, os poliedros das figuras 1 e 3 são homeomorfos a esferas e o da figura 2 é homeomorfo a um toro.

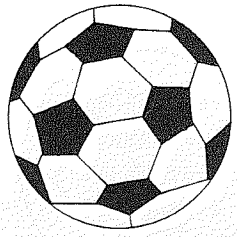


Figura 4

Uma bola de futebol é homeomorfa a um poliedro. Nesta subdivisão, embora curvilinea, ainda se tem

$$V-A+F = 60-90+32 = 2$$

Poincaré mostrou que se o poliedro P, com V vértices, A arestas e F faces, é homeomorfo ao poliedro P', com V' vértices, A' arestas e F' faces então V, A, F podem ser (e em geral são) diferentes de V', A', F' respectivamente, mas $V-A+F = V'-A'+F'$.

É costume hoje em dia escrever $\chi(P) = V-A+F$ e chamar este número a *característica de Euler-Poincaré* do poliedro P. A afirmação de que poliedros homeomorfos têm a mesma característica de Euler-Poincaré se exprime dizendo que $\chi(P)$ é um *invariante topológico* do poliedro P.

Sabemos que $\chi(P) = 2$ quando P é um tetraedro. Logo, todo poliedro homeomorfo ao tetraedro (ou seja, a uma esfera) tem característica de Euler-Poincaré igual a 2. Em particular, isto ocorre com todo poliedro convexo P pois projetando-o a partir de um ponto interior, sobre uma esfera S que contenha P, obtemos um homeomorfismo $f:P \to S$, como mostra a figura abaixo.

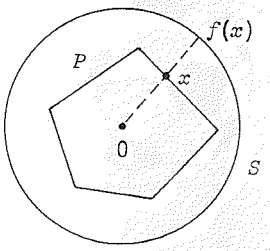


Figura 5

Outro exemplo: como o poliedro da figura 2 tem característica zero, segue-se que todo poliedro homeomorfo a um toro cumpre $V-A+F = 0$.

Para todo número inteiro n positivo, negativo ou zero, existe um poliedro cuja característica de Euler-Poincaré é n.

A figura 6 mostra poliedros com características de Euler-Poincaré iguais a 1, 3 e -2 respectivamente.

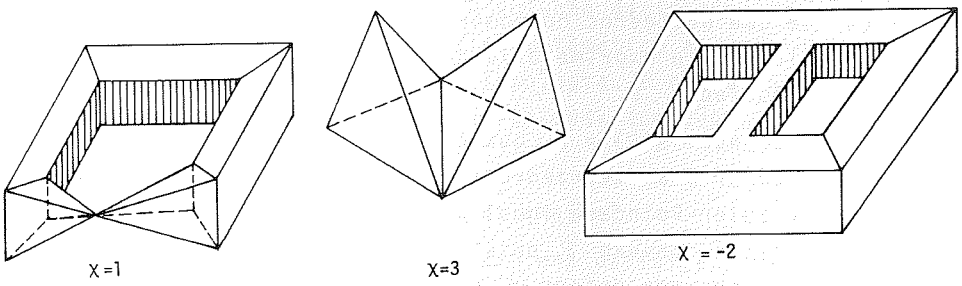


Figura 6

Observações:

1. Euler resolveu brilhantemente o problema das pontes de Konisberg (vide Newman [1956], vol. I, pag. 573) porque percebeu

que era uma questão de Topologia, mas não foi ele, e sim Poincaré, o primeiro a observar o mesmo para a relação de Euler $V-A+F = 2$.

2. A solução dada por Pincaré baseia-se em sua Teoria da Homologia. A rigor, ela só foi completada mesmo por Alexander [1915] com sua demonstração da invariância topológica dos grupos de homologia de um poliedro. (Poincaré admitia este fato mas nunca se preocupou em demonstrá-lo.)

3. Na verdade, não é necessário que os poliedros P, Q sejam homeomorfos para que valha $\chi(P) = \chi(Q)$. Basta que eles tenham o mesmo "tipo de homotopia", o que constitui uma exigência bem menor. (Veja Pontriagin [1952], pags. 32 e 84.)

4. Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins (loc.cit.) enunciam o Teorema de Euler para poliedros homeomorfos à esfera. Ambos usam a mesma demonstração, essencialmente devida a Cauchy. Ela será apresentada na seção seguinte e analisada criticamente logo depois.

5. Assim como a palavra "polígono" em Geometria Plana pode significar tanto o contorno como a região por ele limitada, também "poliedro" às vezes significa um corpo sólido e às vezes sua casca. No que tange ao Teorema de Euler, o sólido é irrelevante e poliedro é um ente bi-dimensional, formado por vértices, arestas e faces.

§3. A demonstração de Cauchy

Ela será dividida em etapas, para facilitar a análise que faremos na seção seguinte.

1ª Etapa. Retira-se uma face do poliedro. Isto não altera os números V, A mas F diminui de uma unidade. Basta então provar que o poliedro modificado cumpre a condição $V-A+F = 1$.

2ª Etapa. Diz-se que uma aresta do poliedro é *livre* quando é lado de apenas uma face. O poliedro modificado possui arestas livres, a saber: os lados da face retirada. Esticando-se o poliedro a partir das arestas livres, pode-se achatá-lo de modo que ele se transforme numa figura plana. Durante este processo, os números , e mantêm-se constantes. Se, em particular, o poliedro era convexo, este achatamento pode ser feito de modo bastante simples, projetando-se o poliedro modificado sobre um plano, a partir de um ponto situado tão próximo da face omitida que nenhuma semi-reta que parta desse centro de projeção contenha mais de um ponto do poliedro. Imaginando a origem dessas semi-retas como um foco luminoso, o modelo achatado do poliedro é sua sombra sobre o plano da projeção.

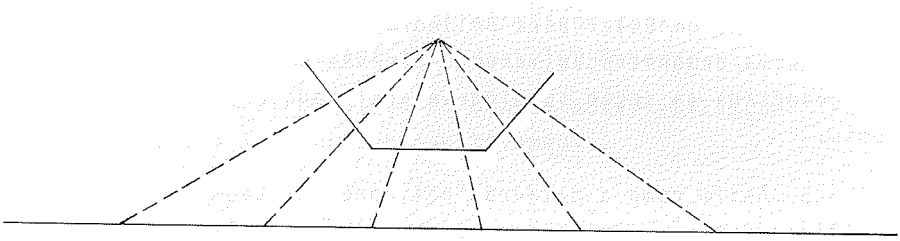
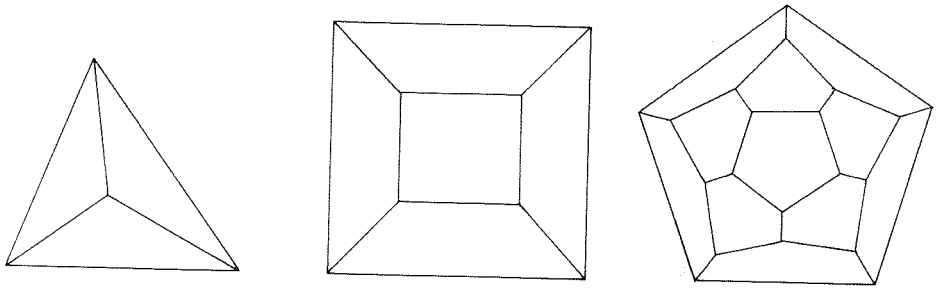


Figura 7

A figura 8 mostra o resultado da aplicação das etapas 1 e 2 aos poliedros da figura 1.



TETRAEDRO CUBO DODECAEDRO

Figura 8

3ª Etapa. Traçando diagonais que não se cortam, decompõe-se cada face em triângulos. Cada vez que se traça uma diagonal que não interseta as outras, o número V não muda, enquanto A e F aumentam de uma unidade, logo $V-A+F$ não se altera. Podemos então supor que todas as faces do poliedro são triângulos. A figura 9 mostra como fica o cubo depois de executadas as etapas 1, 2 e 3.

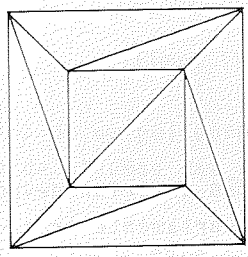
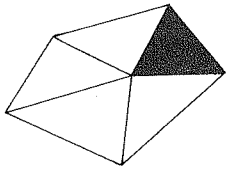


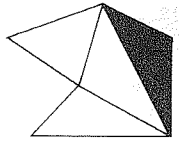
Figura 9

4ª Etapa. Começa-se a "despetalar" o poliedro plano (cujas faces agora são triângulos), retirando-se uma a uma as faces que têm alguma aresta livre. Ao retirar cada uma dessas faces, o número $V-A+F$ não se altera. Com efeito, se o triângulo retirado tem apenas uma aresta livre, sua retirada não muda V mas faz com que



(a)

O triângulo retirado tem uma aresta livre



(b)

O triângulo retirado tem duas arestas livres

Figura 10

A e F diminuam ambos de uma unidades, o que deixa $V-A+F$ constante. Se, porém, o triângulo tem duas arestas livres, ao retirá-lo estaremos diminuindo um vértice, duas arestas e uma face, logo $V-A+F$ não se altera.

5ª Etapa. (Conclusão.) Retirando, uma a uma, as faces que têm alguma aresta livre chega-se, finalmente, à última, que é um triângulo, para o qual se tem evidentemente $V-A+F = 1$. Isto conclui a demonstração.

§4. Análise da demonstração

Os argumentos da seção anterior devem provar alguma coisa. O problema é saber o que. Certamente trata-se de uma proposição sobre poliedros. Então, a primeira coisa a fazer para afastar dúvidas é definir o que se entende por poliedro.

Um *poliedro* P é a reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as *faces* de P. Os lados desses polígonos são chamados as *arestas* de P. Os vértices do poliedro são os vértices de suas faces.

Exige-se ainda de um poliedro P que suas faces estejam "regularmente dispostas", isto é, que a interseção $F \cap G$ de duas faces distintas de P seja uma aresta comum, um vértice comum a F e G ou seja vazia.

Todos os exemplos de poliedros apresentados nas seções anteriores se enquadram na definição acima. Os objetos da figura 11, abaixo, parecem poliedros mas não cumprem as condições da definição. No objeto à esquerda, as faces superior e inferior são regiões planas mas não são polígonos, muito menos polígonos convexos. À direita, a interseção da face F (quadrado) com a face G (retângulo) não é uma aresta (lado) de F.

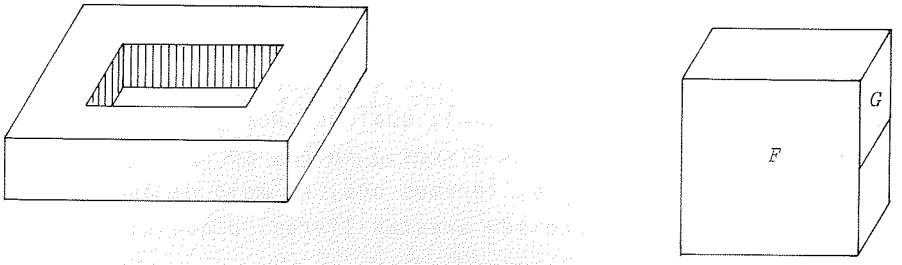


Figura 11

Um subconjunto Q de um poliedro P chama-se um *subpoliedro* de P quando é reunião de algumas das faces de P. Evidentemente, Q é também um poliedro.

Chama-se *bordo* de um poliedro à reunião de suas arestas livres. (Como no §3, uma aresta diz-se *livre* quando é lado de apenas uma face do poliedro.)

Dadas estas definições, passaremos a analisar, uma por uma, as sucessivas etapas da demonstração tradicional.

1ª Etapa. Para que este argumento valha, é preciso supor

A) *que o poliedro P possua pelo menos uma face sem arestas livres.*

2ª Etapa. A afirmação de que, omitindo-se uma face do poliedro, ele fica homeomorfo a um subconjunto do plano é válida quando o poliedro é homeomorfo a uma esfera, pois basta retirar um ponto da esfera para que ela fique homeomorfa ao plano. Mas qual é a vantagem de se reduzir o argumento a um poliedro planar? É a seguinte: todo poliedro planar (e por conseguinte qualquer dos seus subpoliedros) possui arestas livres. [Com efeito, todo subconjunto próprio de $\mathbb{R}^2$ tem fronteira não vazia, e, se $P \subset \mathbb{R}^2$ é um poliedro, a fronteira do conjunto P é a reunião de suas arestas livres.] Assim, para que sejam válidos os argumentos seguintes basta supor

B) *que todo subpoliedro próprio de P, tenha arestas livres.*

Exemplo. No segundo poliedro da figura 3 (reunião de dois tetraedros com uma aresta comum), qualquer dos tetraedros é um subpoliedro próprio sem arestas livres. Então, se aplicarmos a ele o processo de despetalação, teremos que, no meio da operação, retirar mais uma vez uma face sem arestas livres, o que alterará χ novamente.

3ª Etapa. Não há críticas a fazer, já que nossa definição de poliedro exige que as faces sejam polígonos convexos. Isto permite escolher em cada uma delas um vértice e traçar diagonais a partir dele.

Observação. O Teorema de Euler continua válido se admitirmos uma noção mais geral de poliedro, no qual as faces não precisam ser polígonos convexos: basta que sejam polígonos *simples*. (Um polígono chama-se simples quando seu bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem que se passe duas vezes pelo mesmo vértice.) Com efeito, todo polígono simples, convexo ou não, pode ser decomposto numa reunião de triângulos justapostos, cujos vértices são também vértices do polígono dado. (Se o polígono não é convexo, sua decomposição é feita ainda por meio de diagonais porém não todas partindo do mesmo vértice.)

4ª Etapa. Esta é a parte em que a demonstração de Cauchy se mostra mais deficiente. As possibilidades, a respeito do "triângulo retirado" não são apenas as duas ali consideradas. Na realidade, há mais quatro (!) possibilidades que não foram mencionadas, a saber:

a) O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre. (Isto é, seus 3 vértices pertencem também a outras faces que ainda não foram retiradas do poliedro.)

b) O triângulo a ser retirado tem as três arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre.

c) O triângulo a ser retirado tem três aresta e um vértice livre.

d) O triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres.

Estas possibilidades acham-se ilustradas na figura 12.

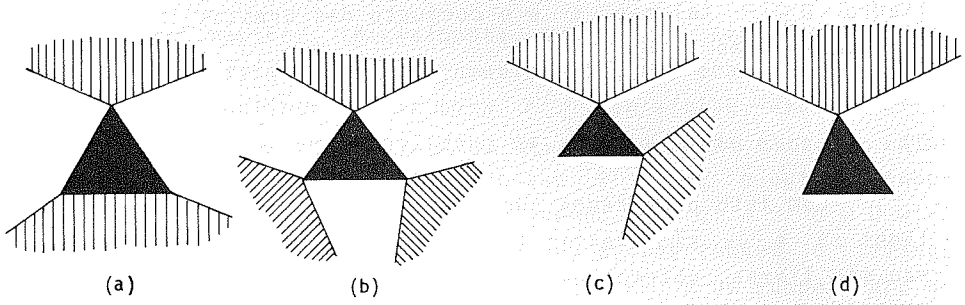


Figura 12

Consideremos a possibilidade a), em que o triângulo a ser omitido tem 2 arestas e nenhum vértice livre. Em primeiro lugar, devemos deixar explícito que o Teorema de Euler se refere a poliedros conexos. Diz-se que um poliedro P é *conexo* quando não é possível escrevê-lo como reunião $P = P_1 \cup P_2$, onde P_1 e P_2 são subpoliedros de P com $P_1 \cap P_2 =$, salvo no caso trivial em que P_1 ou P_2 é vazio. Isto equivale a afirmar que dois vértices quaisquer de P podem ser ligados por uma poligonal formada por arestas de P. Todo poliedro P, conexo ou não, se exprime de modo único como uma reunião finita de subpoliedros conexos máximos (isto é, que não estão contidos propriamente noutro subpoliedro conexo), chamados as *componentes conexas* de P. Para demonstrar o Teorema de Euler, devemos supor

C) *que o poliedro P seja conexo*

Então, no processo de despetalar o poliedro, enquanto retirarmos faces como as da figura 10, continuaremos obtendo poliedros conexos. Afirmamos agora que, ao retirarmos um triângulo do tipo (a) da figura 12, se o poliedro era conexo deixará de sê-lo e, em geral, se era desconexo, o número de suas componentes conexas aumentará de uma unidade. Para provar isto, vamos ter que fazer uma hipótese adicional, precedida de uma definição. Um *ciclo* num poliedro P é uma linha poligonal fechada, cujos lados são arestas de P. Diz-se que um ciclo $\gamma \subset P$ é um *bordo* quando existe um subpoliedro $Q \subset P$ tal que γ é o conjunto das arestas livres de Q. Admitamos então

D) *que todo ciclo em P seja um bordo*

Com isto provaremos que, retirando o triângulo xyz cujos lados xz e yz são arestas livres mas o vértice z e o lado xy não são livres, obtemos um novo poliedro, no qual os vértices x e z pertencem a componentes conexas distintas, isto é, não podem ser ligados por uma poligonal cujos lados são arestas. Com efeito, suponhamos (por absurdo) que, retirado o triângulo xyz, houvesse ainda uma poligonal γ (da qual os lados xz e yz não fazem parte) cujos extremos fossem x e z. Pela hipótese D), $\gamma \cup xz$ seria bordo de algum subpoliedro (do poliedro obtido com a retirada de xyz). Em particular, xz seria lado de outro triângulo além de xyz, contrariando o fato de xz ser aresta livre. Assim, no caso (a) da figura 12, a retirada do triângulo xyz faz V ficar constante, diminui A de duas unidades e F de uma, logo faz $V-A+F$ aumentar de uma unidade. Em compensação, o número de componentes conexas também aumenta de uma unidade, o que nos permite continuar despetalando em cada componente, e a demonstração se conclui como antes.

Antes de passar às outras três possibilidades da figura 12, convém corrigir o uso indevido que fizemos da hipótese D). Com efeito, esta condição diz respeito ao poliedro inicial P, nada

nos garantindo que ela continue a ser satisfeita por todos os poliedros que são obtidos de P mediante sucessivas retiradas de faces. Por exemplo, se P for o poliedro da figura 9, a hipótese D) é verificada, mas a primeira etapa da demonstração nos leva a omitir um dos triângulos internos, o que fornece um novo poliedro, no qual tanto o contorno externo como o interno são ciclos que não constituem o bordo de qualquer subpoliedro. Para evitar esse tipo de problema, faremos mais uma hipótese, supondo agora

E) *que toda aresta de P seja lado de exatamente duas faces de P*

Agora podemos mostrar, inicialmente, que se P' se obtem de P por omissão de uma face T então a condição D), que era válida para o poliedro P, continua válida para P'. Com efeito, dado um ciclo γ em P', seja Q um subpoliedro de P cujo bordo é γ. Então a hipótese E) implica imediatamente que $Q' = P-Q$ é outro subpoliedro de P cujo bordo ainda é γ, sendo $Q \cap Q' = \gamma$ e $Q \cup Q' = P$. Assim, dos dois subpoliedros Q, Q', um apenas contém o triângulo T. Seja, por exemplo, $T \subset Q$. Então Q' é um subpoliedro de P' cujo bordo é γ, o que comprova a hipótese D) em P'. Em seguida observemos que se o poliedro P' cumpre a condição D) e $P'' = P'-T$, onde T é uma face de P' com uma ou duas arestas livres, mas sem vértices livres, como na figura 10(a) então P' ainda cumpre a condição D). Com efeito, se $\gamma \subset P''$ é um ciclo então existe um subpoliedro $Q \subset P'$, cujo bordo é γ. Mas T não pode ser face de Q porque $T \subset Q$ implicaria que o bordo de Q (isto é, γ) conteria necessariamente as faces livres de T (absurdo, pois $\gamma \subset P'-T$). Portanto $Q \subset P''$, logo P'' cumpre a condição D). Finalmente, se P' cumpre a condição D) e T é o triângulo negro da parte (a) da figura 12, afirmamos que cada componente conexa de $P'' = P'-T$ ainda cumpre D). O raciocínio é análogo ao do caso anterior. Com efeito, dado um ciclo γ numa componente conexa C de P'', existe um subpoliedro $Q \subset P'$ cujo bordo é γ. Afirmamos que $Q \subset C$. Com efeito, se Q contivesse faces de mais de uma componente, teria que conter T mas então o bordo de Q, além de γ, teria que conter as faces livres de T.

Completada a demonstração do caso (a) da figura 12, tratemos rapidamente dos demais. No caso (b), ao retirar o triângulo negro, $V-A+F$ aumenta de duas unidades e, usando novamente a condição D), pode-se mostrar que o número de componentes conexas também aumenta de duas unidades. O caso (c) é inteiramente análogo ao (a) e o caso (d) é óbvio.

Podemos agora ver exatamente o que ficou provado pela demonstração de Cauchy. Antes de enunciar o resultado final convém observar que a condição E) dispensa a necessidade de supor A) e, além disso, diante de E), a condição B) é equivalente a outra, bem mais conhecida em Topologia, que introduziremos agora.

Diremos que duas faces T, S de um poliedro P são *encadeadas* quando existe numa seqüência $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de faces de P tais que $T_1 = T$, $T_n = S$ e, para $i = 1,2,\ldots,n-1$, a interseção $T_i \cap T_{i+1}$ é uma aresta comum a T_i e T_{i+1}. Podemos então exigir do poliedro P a condição

B*) *que duas faces quaisquer de P sejam encadeadas*

Evidentemente, B*) implica que o poliedro P é conexo, logo dispensa a condição C). Provemos agora que, na presença de E), as condições B) e B*) são equivalentes.

Em primeiro lugar, suponhamos B). Dada uma face T, seja Q a reunião das faces de P que podem ser encadeadas com T. Afirmamos que $Q = P$. Do contrário, em virtude de B), o subpoliedro Q teria uma aresta livre α, pertencente a uma face $S \subset Q$, logo S encadeável com T. Pela condição E), a aresta α pertenceria a outra face S' de P. Como α é livre em Q, a face S' não estaria em Q, o que é absurdo pois S' é evidentemente encadeável a T.

Reciprocamente, suponhamos que o poliedro P cumpra B*). Para mostrar que todo subpoliedro próprio $Q \subset P$ tem alguma aresta livre, tomemos uma face S em $P-Q$ e uma face T em Q. Pela

hipótese B*), existe uma cadeia T ,T ,...,T_n em P, com T = T e T_n = S. Seja T_i a última face desta cadeia que pertence a Q. Então $i < n$ e a aresta $\alpha = T_i \cap T_{i+1}$ é livre em Q pois se α fosse lado de outra face em Q além de T_i, essa face (em virtude de E)) teria de ser T_{i+1}, o que é absurdo pois T_{i+1} não está contida em Q.

Finalmente descobrimos qual a proposição provada pela demonstração de Cauchy. Ela é o seguinte

Teorema. *Seja P um poliedro no qual:*

1º) *Toda aresta está contida exatamente em duas faces;*
2º) *Duas faces quaisquer são encadeadas;*
3º) *Todo ciclo é um bordo.*

Então P cumpre a relação de Euler $V-A+F = 2$.

Se o poliedro P é homeomorfo a uma esfera, então as condições 1º), 2º) e 3º) acima são satisfeitas: (Vide Seifert-Threlfall [1954], pag. 166.) Mas isto é um resultado profundo de Topologia, equivalente à demonstração da invariância dos grupos de homologia da esfera S^2. Não se pode, portanto, esperar obter uma demonstração elementar do Teorema de Euler com a hipótese de que P é homeomorfo a uma esfera, como fazem Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins.

Jonas M. Gomes chamou a minha atenção para o fato de que, reciprocamente, todo poliedro P que cumpre as três condições do teorema acima é uma superfície topológica logo (em virtude do teorema de classificação das superfícies) a terceira condição implica que $|P|$ é homeomorfo a uma esfera.

Referências Bibliográficas

Alexander, J. [1915] - *A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 16, pags. 148-154.

Azambuja Filho, Z. [1983] - *Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática nº 3, pags. 15-17.

Cauchy, A.L. [1813] - *Oeuvres*, 2me. partie, vol. 1, pags. 7-38.

Courant, R. e Robbins, H. [1951] - *What is Mathematics?* Oxford Univ. Press.

Gerresten, J. e Verdenduin [1974] - *Polygons and polyhedra, in "Fundamentals of Mathematics"* (H. Behnke et al. eds.) The M.I.T. Press, pag. 266.

Federico, P.J. [1982] - *Descartes on Polyhedra*, Springer Verlag.

Hilbert, D. e Cohn Vossen, S. [1956] - *Geometry and the Imagination*, Chelsea.

Lakatos, I. [1976] - *Proofs and Refutations*, Cambridge Univ. Press.

Legendre, A.M. [1846] - *Élements de Géométrie*. Paris, Chez Firmin Didot Frères.

Lima, E.L. [1984] - *Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática, nº 5, pags. 23-27.

Newman, J. [1956] - *The World of Mathematics*, Simon and Schuster.

Poincaré, H. [1893] - *Sur la généralization d'un théorème d'Euler relatif aux poliédres*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 117, pag. 144.

Pontriagin, L. [1952] - *Foundations of Combinatorial Topology*, Graylork.

Seifert, H. e Threlfall, W. [1951] - *Lecciones de Topologia*, Inst. Jorge Juan de Matemáticas, Madrid.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Estrada Dona Castorina, 110
22.460 Rio de Janeiro RJ