Aristarco e as dimensões astronômicas

RPM 55

Geraldo Ávila

Introdução

Em artigo na **RPM** 54 falamos de Eratóstenes e seu cálculo do tamanho da Terra. No presente artigo falaremos de Aristarco (± 310 – 230 a.C.), um ilustre astrônomo da Antigüidade, que nos deixou um livro muito interessante sobre o cálculo das distâncias do nosso planeta à Lua e ao Sol, bem como o tamanho desses dois corpos celestes. Como Eratóstenes, Aristarco pertenceu à escola de Alexandria, mas viveu algumas dezenas de anos antes de Eratóstenes. Aristarco foi o primeiro grande astrônomo da escola de Alexandria. Ele era originário de Samos (veja o mapa), a mesma ilha donde viera Pitágoras no século VI a.C.

Aristarco e a distância do Sol

Aristarco encontrou um modo muito simples e ao mesmo tempo bastante engenhoso para comparar as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua. Mas antes de explicar seu raciocínio, procuremos entender por que o Sol está mais longe da Terra do que a Lua.

O professor tem aqui uma excelente oportunidade de estimular seus alunos a descobrir por conta própria um fato muito significativo na construção do conhecimento. Em primeiro lugar, os alunos devem explicar as razões por que o Sol está mais longe da Terra do que a Lua. Para isso eles devem observar o movimento da Lua ao longo do mês, notando sua passagem por suas várias fases. Eles decerto vão descobrir, por conta própria, que a Lua está mais perto de nós do que o Sol. De fato, começando com lua-cheia, a luminosidade lunar vai diminuindo progressivamente, passando por quarto-minguante até chegar a lua-nova[1]. Isto significa que a Lua vai se interpondo progressivamente entre o Sol e a Terra, portanto, está mais perto de nós do que o Sol. Às vezes, ao chegar a lua-nova ocorre um eclipse solar, o que é prova cabal de que a Lua está "do lado de cá do Sol".

Outro modo de certificar-se que o Sol está mais distante de nós do que a Lua consiste em supor o contrário. O que veríamos no céu se a Lua estivesse mais longe de nós do que o Sol? Ela estaria então sempre iluminada diretamente pelo Sol, como ilustra a Figura 1. Não haveria nunca lua-nova. E haveria lua cheia duas vezes no ciclo lunar, nas posições 1 e 3, esta última em pleno meio-dia! Ora, isso nunca acontece.

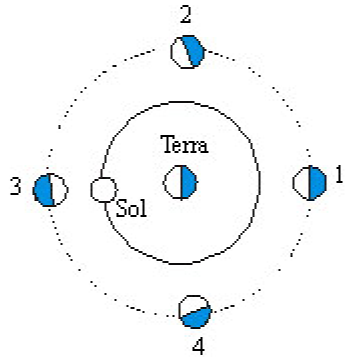

Figura 1

A brilhante idéia de Aristarco

Muitas pessoas pensam que as idéias geniais costumam ser profundas e complicadas. Freqüentemente elas são é simples; tanto que muitas vezes nós mesmos, comuns mortais, nos surpreendemos exclamando “mas como que eu não pensei nisso antes?!”
Reflita um pouco, caro leitor, e tente entender por que o Sol está muitíssimo mais distante da Terra do que a Lua. Mas não se sinta frustrado se você não perceber o exato porquê, pois a idéia que teve Aristarco para chegar a essa conclusão é considerada por autores abalisados como uma uma das mais notáveis da história da ciência.

Aristarco observou a Lua em quarto-crescente ou quarto-minguante, quando ela é vista metade escura e metade iluminada (ver Figura 2). Fazendo a observação exatamente ao nascer ou ao pôr-do-Sol, constatamos que ela está quase na vertical acima de nossas cabeças.

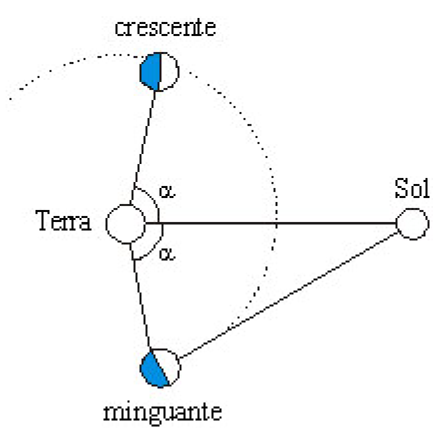

Figura 2

Vamos fazer um desenho, representado o observador terrestre por T, o centro da Lua por L e o centro do Sol por S (ver Figura 3). Obtemos um triângulo LST, que é retângulo em L[2], e cujo ângulo a estará muito próximo de 90º. Esta constatação já é suficiente para nos fazer ver que o Sol está muito mais longe de nós do que a Lua. Do contrário, o ângulo a seria bem menor.

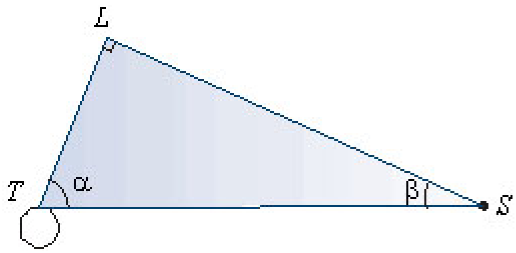

Figura 3

Sendo α muito próximo de 90°, o ângulo β será bem mais próximo de zero, pois estes dois ângulos são complementares. Aristarco achou para a um valor próximo de 87°. Desenhando então um triângulo semelhante ao triângulo *TSL*, podemos constatar que o lado *TS* é aproximadamente 20 vezes o lado *TL*[3]. Ou seja, a distância da Terra ao Sol é aproximadamente 20 vezes a distância da Terra à Lua.

Que Matemática foi usada?

Sim, vale a pena examinar essa questão, para que os alunos vejam com clareza os fatos matemáticos que estão sendo utilizados. Utilizamos o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° para concluir que α e β são ângulos complementares; ou ainda, que o ângulo a determina toda uma classe de triângulos retângulos semelhantes entre si.

Aprecie aqui, professor, a importância do conceito de semelhança de triângulos (e responda a seus alunos a pergunta que eles sempre fazem: professor, para que serve esse negócio de semelhança de triângulos?). Uma vez conhecido um desses triângulos (como *TSL*), a razão *TS/TL* é a mesma em todos eles. Isso significa que, impossibilitado de medir essa razão no enorme triângulo astronômico original, Aristarco decerto desenhou um triângulo a ele semelhante, num pedaço de pergaminho, de papiro, ou mesmo na areia (como um antigo José de Anchieta escrevendo nas areias de Peruíbe); e nesse triângulo pequeno ele poderia medir as distâncias *TL* e *TS*, e comprovar que *TS* é aproximadamente 20*TL*.

Será que Aristarco mediu o ângulo α ?

Essa é outra questão interessante, que pode mesmo ocorrer a um aluno mais atento. Naquela época eles não possuíam instrumentos precisos de medição. Por outro lado, não é nada fácil saber o momento exato em que a Lua está metade iluminada e metade escura. Para medir o ângulo, seria preciso observar isto ao nascer ou ao pôr-do-Sol. O professor pode sugerir que seus alunos façam essas observações.

Na verdade, Aristarco não precisava medir esse ângulo. Ele poderia calculá-lo por uma proporção simples. Basta observar o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo gasto para ir de minguante a crescente. Aristarco teria observado que o ciclo lunar dura 29,5 dias; e que a passagem de minguante a crescente (observe a Figura 2) dura cerca de 14,25 dias, um dia a menos que a passagem de crescente a minguante. Este último fato também não pode ser comprovado após uma única observação, seria preciso fazer várias observações e calcular o valor médio delas (uma boa tarefa como projeto para os alunos fazerem durante o semestre. O professor poderia até dividir a classe em pequenos grupos para fazer as observações e os cálculos, que deveriam ser comparados entre os grupos ao final do semestre ou do ano letivo).

Admitidos corretos os dados anteriores, temos a seguinte proporção:

$$\frac{360}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25},$$

donde se obtém $\alpha \approx 86,95° \approx 87°$.

Observação 1

É preciso que se diga que o resultado de Aristarco está muito longe do valor correto, pois hoje sabemos que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua. Em conseqüência, o ângulo α está muito próximo de 89,86°, portanto, muito perto de 90°. Isso não empana o mérito de Aristarco, que está na idéia que ele teve para calcular a distância da Terra ao Sol, comparativamente à distância da Terra à Lua.

Observação 2

Outra coisa a observar é que o que fazemos hoje em dia não é desenhar o triângulo semelhante *TSL* e medir seus lados, mas recorrer a uma tabela de valores da razão *TL/TS*. De fato, é freqüente a ocorrência de cálculos de uma lado de um triângulo retângulo em termos de outro, de sorte que é muito conveniente construir tabelas que possam ser usadas sempre que surgir a necessidade. Está aqui uma boa motivação para a trigonometria. A razão *TL/TS* é, por definição, o seno do ângulo β; portanto, podemos escrever:

$$\frac{TL}{TS} = sen\beta, \text{ donde } TS = \frac{TL}{sen\beta}.$$

Agora é só substituir aí o valor do seno, obtido numa tabela, para calcular *TS* em termos de *TL*. Melhor ainda do que fazíamos há décadas, o cálculo pode ser feito facilmente com uma calculadora científica. Mas falta um detalhe: necessitamos do valor de *TL* para *TS*. Explicaremos isso após a próxima seção.

Tamanhos angulares do Sol e da Lua

Uma interessante coincidência que nos proporciona a Natureza é o fato de o Sol e a Lua terem o mesmo tamanho angular. Em outras palavras, como ilustra a Figura 4, o ângulo 2γ sob o qual vemos a Lua é o mesmo sob o qual vemos o Sol. A própria Natureza nos poupa de fazer qualquer medida, pois ela exibe a coincidência exata dos dois discos, solar e lunar, num eclipse total do Sol.

Aristarco estimou o ângulo 2γ como sendo 2° quando, na verdade, ele é de cerca de 0,5°. Mas essa discrepância, como o leitor notará no raciocínio a seguir, não altera o resultado que vamos obter, baseado na semelhança dos triângulo retângulos *TLL'* e *TSS'*. Esta semelhança permite escrever

$$\frac{SS'}{LL'} = \frac{TS}{TL}.$$

Isso significa que os raios do Sol e da Lua, *SS'* e *LL'* respectivamente, estão entre si como as distâncias da Terra ao Sol e à Lua, respectivamente *TS* e *TL*. Como a razão destas duas últimas distâncias é conhecida, o mesmo é verdade da razão *SS'/LL'*. Segundo Aristarco, essas razões são iguais e estão compreendidas entre 18 e 20.

Resumo dos resultados

Para explicar os resultados de Aristarco, é conveniente introduzir a seguinte notação:

D_S = distância da Terra ao Sol;
D_L = distância da Terra à Lua;
R_S = raio do Sol;
R_L = raio da Lua.

Vamos também indicar com R_T o raio da Terra, e introduzir os parâmetros a e b assim definidos. Veja a Figura 4 para entender a igualdade das razões $\frac{R_S}{D_S}$ e $\frac{R_L}{D_L}$.

$$a = \frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L}; \quad b = \frac{D_S}{D_L}.$$

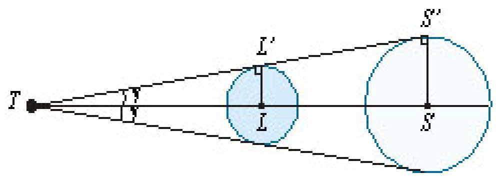

Figura 4

Para Aristarco, como já vimos $b \approx 20$. Para obter o parâmetro a, como o ângulo γ era conhecido, ele teria de medir os lados SS' e TS no triângulo TSS' (figura 4) Para nós, hoje a razão SS'/TS é o que chamamos de seno do ângulo g, de sorte que a = sen γ. Ele completou a determinação das grandezs D_T, D_L, R_S e R_L em termos do raio da Terra R_T, valendo-se de um eclipse da Lua. O que ele fez – e que está explicado no Apêndice adiante – permite escrever:

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab};$$

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a};$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11};$$

$$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b};$$

Com os dados de Aristarco,

$D_L \approx 16{,}8R_T$, $D_S \approx 337R_T$, $R_S \approx 5{,}7R_T$, $R_L \approx 0{,}29R_T$.

Ao contrário, com valores mais corretos para os ângulo β e γ, obtemos resultados bem mais próximos dos valores modernos:

$D_L \approx 62R_T$, $D_S \approx 24855R_T$, $R_S \approx 109R_T$, $R_L \approx 0{,}27R_T$.

Falta esclarecer

Vimos que Aristarco necessitou do raio da Terra para seus cálculos das distâncias da Terra à Lua e ao Sol. No entanto, o raio da Terra, pelo que sabemos, foi calculado por Eratóstenes depois de Aristarco. Por isso é preciso que se diga que outros sábios, antes de Eratóstenes e Aristarco, calcularam o raio da Terra. O problema é que só sabemos disso por vagas referências, sobretudo em Aritstóteles. As próprias distâncias da Terra à Lua e ao Sol foram calculadas – ou, pelo menos, grosseiramente avaliadas – antes desses sábios, mas disso não temos informações precisas.

Considerações finais

Os resultados aqui descritos estão num livro de Aristarco intitulado *Sobre o tamanho e distâncias do Sol e da Lua*. Esse livro chegou até nossos dias, e dele há uma excelente edição comentada, devida ao eminente historiador da ciência Thomas L. Heath (*Aristarcus of Samos*, Oxford University Press).

Aristarco escreveu outros livros, que se perderam. Deles temos notícia por referências feitas por outros autores. Por exemplo, há um livro de Arquimedes, intitulado *O arenário* ou *O contador de areia*, no qual Arquimedes mostra como escrever números muito grandes. (Hoje em dia isso é muito fácil, basta escrever uma potência de 10 com expoente bem grande; por exemplo, 10^{100} já ultrapassa, e de muito, o número de todos os átomos do universo).

A tarefa de Arquimedes não era simples porque o sistema numérico de seu tempo não possuía a facilidade do sistema posicional que hoje usamos. Para bem impressionar, Arquimedes começa anunciando que poderá escrever um número maior que o número de grãos de areia existentes no universo. É aí que ele fala no Universo de Aristarco, fazendo referência ao livro que este astrônomo teria escrito explicando a teoria de que o Sol estaria no centro do Universo, com a Terra e os demais planetas girando em volta. Esse livro de Aristarco certamente existia na Biblioteca de Alexandria. Quando refletimos sobre isso, e sobre os muitos outros livros que lá estavam e que foram destruídos para sempre – livros sobre Astronomia, todas as ciências e tudo o mais que diz respeito à atividade intelectual do ser humano – só então podemos avaliar a imensa e irreparável tragédia que foi a destruição dessa biblioteca.

Apêndice: para que serve um eclipse da Lua

Vamos descrever o raciocínio de Aristarco na observação de um eclipse da Lua, quando este satélite atravessa o cone de sombra da

Terra (Figura 5). Usaremos naturalmente, a notação moderna, de que Aristarco não dispunha.

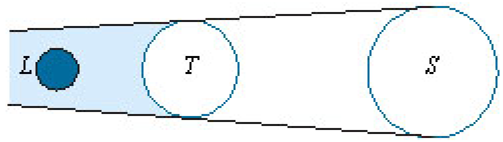

Figura 5

Pelo tempo gasto pela Lua para atravessar o cone de sombra da Terra, Aristarco calculou o diâmetro desse cone na altura da Lua – *LD* na Figura 6 – como sendo 8/3 do diâmetro da Lua.

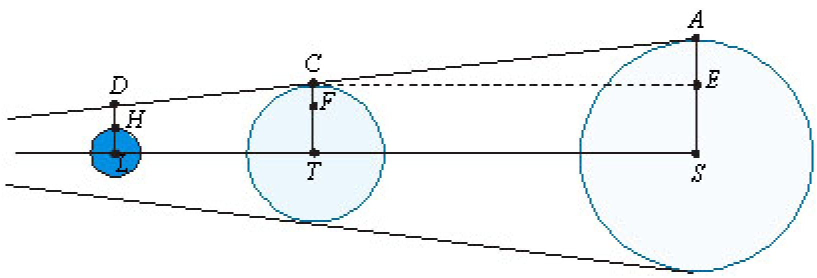

Figura 6

Na Figura 6, *L, T* e *S* são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_T$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são respectivos raios. De acordo com Aristarco, $LD = 8R_L/3$. Da semelhança dos triângulos *DFC* e *CEA* resulta $CF/DF = AE/CE$. Observe que

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - 8R_L/3,\ DF = D_L,$$

$$AE = AS - SE = R_S - R_T,\ CE = D_S.$$

Substituindo esses valores na proporção anterior, obtemos

$$\frac{R_T - 8R_L/3}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}.$$

Por outro lado, já sabemos que

$$D_S = bD_L,\ R_S = aD_S = abD_L,\ R_L = aD_L,$$

de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita assim:

$$\frac{R_T - 8aD_L/3}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L},\ \text{donde}\ \frac{R_T}{D_L} - \frac{8a}{3} = a - \frac{R_T}{bD_L},$$

que também se escreve

$$(1+1/b)\frac{R_T}{D_L} = 11a/3, \text{ donde } D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}.$$

Então,

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}, \quad D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a},$$
$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11}, \quad R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b},$$

que são os quatro valores registrados anteriormente.

[1] Há um fenômeno interessante que ocorre na passagem da lua-nova que vale a pena mencionar aqui: o disco lunar, embora voltado para a Terra, portanto não recebendo luz direta do Sol, apresenta-se levemente iluminado. Como pode ser isso? A explicação, dada pela primeira vez pelo sábio renascimento Leonardo da Vinci (1452-1519), é curiosa e interessante: a luz do Sol, refletida pela Terra, reflete-se novamente na Lua e volta à Terra. Assim, aquela fraca iluminação do disco lunar numa lua-nova é proveniente da Terra por reflexão na Lua! Pode-se constatar que tal iluminação está ausente mesmo pouco antes do quarto-crescente ou pouco depois do quarto-minguante.

[2] Isso por que a reta LS é perpendicular ao plano que passa pelo observador terrestre e separa, na Lua, o hemisfério iluminado do hemisfério escuro.

[3] Em verdade, o que ele afirma é o que hoje dizemos assim: TS/TL é um número que está compreendido entre 18 e 20.