

## Algumas questões de regularidade na geometria do espaço-tempo

Paolo Piccione

Nessas notas consideraremos uma variedade Lorentziana  $(M, g)$  com uma orientação temporal. Uma curva de classe  $C^1$  por partes  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  é de tipo tempo (resp., causal) se  $\gamma'(t)$  é de tipo tempo (resp., causal) para todo  $t$  onde existir, e se  $\gamma'(t)$  tem a mesma orientação temporal para todo  $t$ . Em vista de construções geométricas envolvendo limites de curvas causais, precisamos introduzir uma noção mais geral de causalidade para curvas. Por isso, consideremos a seguinte:

**1. Definição.** Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma curva contínua. Diremos que  $\gamma$  é *causal orientada no futuro* se para toda vizinhança convexa  $U$  de  $M$ , e para todo intervalo  $[t_1, t_2] \subset I$  tal que  $\gamma([t_1, t_2]) \subset U$ ,  $t_1 < t_2$ , vale<sup>†</sup>  $\gamma(t_1) \leq_U \gamma(t_2)$  e  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ . Curvas causais orientadas no passado são definidas analogamente.

Vale a pena ressaltar que não toda curva que admite derivada quase sempre, e com vetor tangente quase sempre causal é uma curva causal no sentido acima. Contra-exemplos imediatos podem ser obtidos usando os exemplos clássicos de funções reais não constantes com derivada quase sempre nula (tipo função de Cantor). De fato, curvas causais no sentido da Definição 1, são necessariamente localmente Lipschitzianas, e portanto absolutamente contínuas (veja [2], Remark 2.20).

Vale a recíproca dessa afirmação, provada na referência [1] como segue.

**2. Lema.** Se  $\gamma : I \rightarrow M$  é absolutamente contínua e  $\gamma'(t)$  for causal e orientado no futuro quase sempre, então  $\gamma$  é uma curva causal orientada no futuro.

*Demonstração.* Seja  $U$  uma vizinhança convexa em  $M$  e  $s_0 \in I$  tal que  $\gamma(s_0) \in U$ . Como a relação  $\leq_U$  é transitiva, basta mostrar que existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < s_1 - s_0 < \delta$  e  $\gamma([s_0, s_1]) \subset U$ , então  $\gamma(s_0) \leq_U \gamma(s_1)$  e  $\gamma(s_0) \neq \gamma(s_1)$ . Existe um sistema de coordenadas  $(x, t) : U \rightarrow S \times ]a, b[$ , definido numa vizinhança convexa  $V \subset U$  de  $\gamma(s_0)$ , tal que a métrica  $g$ , nessas coordenadas, se escreve como  $g(x, t) = g_t(x) - dt^2$ , onde  $g_t$  é uma métrica Riemanniana em  $S$  que depende (suavemente) do parâmetro  $t \in ]a, b[$ , e  $\partial_t$  é de tipo tempo e orientado no futuro (Exercício 3, Lista de Exercícios 3). Por continuidade, se  $\delta > 0$  é pequeno,  $\gamma([s_0, s_0 + \delta]) \subset V$ . Dados pontos  $p = (x_0, t_0)$ ,  $q = (x_1, t_1)$  em  $V$ , com  $a < t_0 < t_1 < b$  ( $p \neq q$ ), temos  $p \leq_V q$  se e somente se existe uma curva  $C^1$  (por partes)  $y : [t_0, t_1] \rightarrow S$  tal que  $y(t_0) = x_0$ ,  $y(t_1) = x_1$ , e  $g_t(\dot{y}(t), \dot{y}(t)) \leq 1$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Pois, nesse caso a curva  $[t_0, t_1] \ni t \mapsto \gamma(t) = (y(t), t) \in V$  é uma curva causal  $C^1$  (por partes) orientada no futuro em  $V$ , unindo  $p$  a  $q$ .<sup>‡</sup> Como  $V$  é convexo, a relação  $\leq_V$  é fechada; a condição pode ser enfraquecida, e para que seja  $(x_0, t_0) \leq_V (x_1, t_1)$  basta a existência de uma seqüência de curvas suaves por partes  $y_n : [t_0, t_1] \rightarrow S$  tal que  $y_n(t_0) = x_0$ ,  $y_n(t_1) = x_1$ , e  $g_t(\dot{y}_n(t), \dot{y}_n(t)) \leq 1 + \varepsilon_n$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$  e para todo  $n$ , onde  $\varepsilon_n \downarrow 0$ .

---

<sup>†</sup> Note que com “ $\leq_U$ ” entendemos a relação de causalidade que usa curvas causais suaves por partes.

<sup>‡</sup> Observe que para  $p, q \in V$ ,  $p \leq_V q$  implica  $p \leq_U q$ .

Escrevemos  $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ ,  $s \in [s_0, s_1]$ ; observamos que a função  $s \mapsto t(s)$  é estritamente crescente, pois  $\dot{\gamma}(s)$  é orientado no futuro quase sempre, e daí  $\dot{t}(s)$  é positivo quase sempre. Segue que  $\gamma$  pode ser reparametrizada usando  $t$  como parâmetro:  $\gamma(t) = (x(t), t)$ ; esta reparametrização é ainda absolutamente contínua, e  $\dot{\gamma}(t)$  é causal e orientado no futuro para quase todo  $t$ . Daí,  $g_t(x'(t), x'(t)) \leq 1$  quase sempre, onde  $'$  denota a derivada em relação a  $t$ . Seja  $\tilde{y}_n : [t_0, t_1] \rightarrow S$  uma seqüência de curvas de classe  $C^1$ , com  $\tilde{y}_n(t_0) = x_0$ ,  $\tilde{y}_n(t_1) = x_1$ , para todo  $n$ , e que converge no espaço de Sobolev  $W^{1,1}([t_0, t_1], S)$  a  $x$  para  $n \rightarrow \infty$ ; denote com  $y_n : [t_0, t_1] \rightarrow S$  a curva obtida por reparametrização da  $\tilde{y}_n$  de forma tal que  $g_t(y'_n, y'_n) = C_n$  seja constante. Como o comprimento de  $y_n$  tende ao comprimento de  $x$  para  $n \rightarrow \infty$ , uma estimativa simples mostra que a seqüência  $C_n$  tende a 1, o que conclue a demonstração. **QED**

#### Referências.

- [1] A. M. Candela, J. L. Flores, M. Sánchez, *Global hyperbolicity and Palais–Smale condition for action functionals in stationary spacetimes*, preprint 2006.
- [2] R. Penrose, *Techniques of differential topology in Relativity*, SIAM, Philadelphia, 1972.