Primeira aula

* Apresentação, agradecimentos

* Einstein's happiest thought: um corpo em queda livre não é capaz de medir seu próprio peso! Numa vizinhança pequena em seu entorno, não há campo gravitacional.

→ Se obs em queda livre soltar alguns objetos, eles permanecem em repouso ou em estado de MRU relativo ao obs

→ Equivalência massa - carga gravitacional elevada ao status de princípio!

⇒ Princípio de Equivalência fraco:

O mov de um corpo de teste em um campo gravitacional é independente de sua composição interna (desprezando-se interação de spin ou momentos de quadrupolo c/ gradientes do campo).

* Se o corpo for "grande" tal que o campo varie apreciavelᵗᵉ ao longo de sua extensão, WEP não se aplica!

$\Rightarrow$ Princípio de Equivalência de Einstein:

Em um campo gravitacional arbitrário, nenhum experimento local não-gravitacional é capaz de distinguir um sist não-girante em queda livre (sistema inercial local) de um sistema em movimento uniforme ($\vec{v}$ constante) na ausência de um campo gravitacional.

* Há sists de ref inerciais locais.

* Os efeitos do campo gravitacional não são perceptíveis nestes sist de ref

* definir observador, observador instantâneo e sist ref

gravitação $\Leftrightarrow$ geometria do espaço-tempo.

Notação

$D \to$ conexão ; M ; $\mathfrak{X}(M)$; $\mathfrak{F}(M)$; $\mathfrak{T}^r_s(M)$; $\mathfrak{X}^*(M)$

$\langle \cdot , \cdot \rangle = g(\cdot , \cdot)$

Proposição: $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}^*(M)$ são isomorfos.

Prova: Considere $V, X \in \mathfrak{X}(M)$, defina

$$V^*(X) := \langle V, X \rangle .$$

V^* é $\mathfrak{F}(M)$-linear: uma 1-forma; unicidade: n-deg do produto escalar.

Conversa^{te}, dado $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$, $\exists!\, V \in \mathfrak{X}(M)$ tal que, $\forall\, X \in \mathfrak{X}(M)$,

Falar AQUI sobre componentes de um tensor (págs 5 e 6)

$$\theta(X) = \langle V, X \rangle$$

- expressão em coordenadas; inversa do tensor métrico; n-deg

V e θ são ditos metricamente equivalentes.

Definição Uma conexão D em M é uma função

$D: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que, $\forall\, V, W \in \mathfrak{X}(M)$

(1) $D_V W$ é $\mathfrak{F}(M)$-linear em V;

(2) $D_V(W)$ é $\mathbb{R}$-linear em W;

(3) $D_V(fW) = (Vf)W + f D_V W$, p/ $f \in \mathfrak{F}(M)$.

$D_V W$ é chamada derivada covariante de W c/ resp a V p/ a conexão D.

Def: Seja $V \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$. Definimos $D_V f := Vf$.

* A derivada covariante, por ser uma derivação, fica completa^te determinada por sua ação em $\mathfrak{F}(M)$ e $\mathfrak{X}(M)$. Portanto, se $A \in \mathfrak{I}^r_s(M)$,

$$D_V(A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)) = (D_VA)(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)$$
$$+\sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\dots,D_V\theta^i,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)$$
$$+\sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,D_VX_j,\dots,X_s).$$

<u>Teorema</u> Existe uma única conexão que satisfaça

(4) $[V,W] = D_VW - D_WV \quad (= VW - WV)$

(5) $X\langle V,W\rangle = \langle D_XV,W\rangle + \langle V,D_XW\rangle$

$\forall\, X,V,W \in \mathfrak{X}(M)$. Além do mais, ela satisfaz à fórmula de Koszul:

$$2\langle D_VW,X\rangle = V\langle W,X\rangle + W\langle X,V\rangle - X\langle V,W\rangle$$
$$-\langle V,[W,X]\rangle + \langle W,[X,V]\rangle + \langle X,[V,W]\rangle$$

Prova: (4),(5) → Koszul → unicidade (ñ-deg do produto)

Existência: o lado direito de Koszul define uma fç $\mathfrak{F}(M)$-linear em X, i.e, 1-forma: $D_VW \in \mathfrak{X}(M)$ existe satisfazendo Koszul. Provar direta^te (1 → 5)

Esta conexão é chamada <u>conexão de Levi-Civita</u>.
As componentes desta conexão são os chamados <u>símbolos de Christoffel</u>.

* Pela propriedade (5) e pela ação em tensores, $\forall\, v \in \mathfrak{X}(M)$,

$D_v g = 0$

<u>Definição</u> P/ definir contração de um tensor, precisamos definir suas componentes em uma carta.

$(\mathcal{U}, \xi)$ carta, M n-dimensional, $\xi(p) = (x^1, \dots, x^n)$, $p \in M$.

Sejam $\{u^i\}_{i=1,\dots,n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidos por

$$u^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$$

P/ $f \in \mathcal{F}(M)$, defina $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))$.

A função $\displaystyle \partial_i|_p := \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R} \in T_pM$.

<u>Teorema</u> Se $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ é um sist coord de M em p, os vetores $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ formam uma base em T_pM, e $\forall\, v \in T_pM$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i)\, \partial_i|_p$$

Usando o mesmo sist coord, $dx^1, \dots, dx^n$ é uma base em T^*_pM.

$\Rightarrow$ Se $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$, $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ em $U \subset M$, as componentes de A relativa^{te} a ξ são as funções

$$A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = A(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}).$$

Todos os índices variam entre 1 e n.

Comentar sobre mudança de coordenadas.

Contração de um tensor

Seja $A \in \mathcal{T}^r_s(M)$. $C^l_m A \in \mathcal{T}^{r-1}_{s-1}(M)$ é definido da seguinte forma

sejam $\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}$:

$$C^l_m A(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{K=1}^{n} A(\theta^1, \dots, \underbrace{dx^K}_{l\text{-ésima entrada}}, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, \underbrace{\partial_K}_{m\text{-ésima entrada}}, \dots, X_{s-1})$$

Abaixamento e levantamento

Seja $A \in \mathcal{I}^r_s(M)$, $\theta^1, \dots, \theta^{r+1} \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_1, \dots, X_{s+1} \in \mathfrak{X}(M)$

$\downarrow^a_b A \in \mathcal{I}^{r-1}_{s+1}(M)$ é definido por

$$\downarrow^a_b A(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) = A(\theta^1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{a-ésima entrada}}}{X^*_b}, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1})$$

$X^*_b \in \mathfrak{X}^*(M)$ é metrica^{te} equiv a X_b

$\uparrow^d_c A \in \mathcal{I}^{r+1}_{s-1}(M)$ é definido por

$$\uparrow^d_c A(\theta^1, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = A(\theta^1, \dots, \theta^{d-1}, \theta^{d+1}, \dots, \theta^{r+1}, X_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{c-ésima entrada}}}{\theta^{*d}}, \dots, X_{s-1})$$

* São operações inversas
* A, $\downarrow^a_b A$, $\uparrow^d_c A$ são ditos metrica^{te} equivalentes

Contração métrica

Sejam $A \in \mathcal{I}^r_s(M)$, g o tensor métrico, g^{-1} o tensor definido por $g^{-1}(\theta^1, \theta^2) := g(\theta^{*1}, \theta^{*2})$ (chamarei tensor métrico inverso)

Curiosidade: $\uparrow_1^1 g(\theta, X) = \uparrow_2^1 g(\theta, X) = \theta(X)$.

$C^{ab} A \in \mathcal{I}^{r-2}_s(M)$ é definido por

$$C^{ab} A(\theta^1, \dots, \theta^{r-2}, X_1, \dots, X_s) = \sum_{p,q} A(\underset{\substack{\uparrow \\ a\text{-ésima}}}{\theta^1, \dots, du^p}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ b\text{-ésima}}}{du^q}, \dots, \theta^{r-2}, X_1, \dots, X_s)\, g(\partial_p, \partial_q)$$

$C_{ab} A \in \mathcal{I}^r_{s-2}(M)$ é definido analoga^{te}.

Lema As op de abaixa^{to}, levant^{to}, contração (métrica) comutam c/ derivada covariante.

Lema A função $R: \mathfrak{X}(M)^3 \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R_{X,Y} Z = R(X,Y)Z = D_{[X,Y]} Z - [D_X, D_Y] Z$$

é um elemento de $\mathcal{I}^1_3(M)$ chamado tensor de curvatura de Riemann.

Prova: Mostrar que é $\mathcal{F}(M)$-linear

Propriedades:

(i) $R_{X,Y}Z = -R_{Y,X}Z$

(ii) $g(R_{X,Y}Z, W) = -g(R_{X,Y}W, Z)$

(iii) $g(R_{X,Y}Z, W) = g(R_{Z,W}X, Y)$

Primeira identidade de Bianchi:

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$$

Comentário 01 transporte paralelo

Seja $I \subset \mathbb{R}$, $\alpha: I \to M$ uma curva, $Z \in \mathcal{X}(\alpha)$, $V \in \mathcal{X}(M)$, V_α sua restrição

a $\mathcal{X}(\alpha)$: $\frac{D}{dt}: \mathcal{X}(\alpha) \to \mathcal{X}(\alpha)$ tem as propr:

$Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}(\alpha)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$h \in \mathcal{F}(I)$

(1) $\frac{D}{dt}(aZ_1 + bZ_2) = a\frac{D}{dt}Z_1 + b\frac{D}{dt}Z_2$

(2) $\frac{D}{dt}(hZ) = \frac{dh}{dt}Z + h\frac{D}{dt}Z$

(3) $\frac{D}{dt}V_\alpha(t) = D_{\alpha'(t)}V$

(4) $\frac{d}{dt}g(Z_1, Z_2) = g\left(\frac{D}{dt}Z_1, Z_2\right) + g\left(Z_1, \frac{D}{dt}Z_2\right)$

Se $\frac{D}{dt}Z = 0$, Z é dito paralelo ao longo da curva α.

Definição: Seja $\alpha: I \to M$ uma curva, $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$. O mapa

$$P_a^b(\alpha) : T_pM \to T_qM$$

é chamado transporte paralelo ao longo de α.

Lema: O transp paral é uma isometria linear

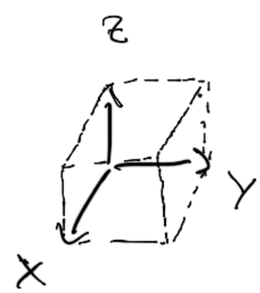
* Redef par, pode-se fazer $a = 0$, $b = t$. Chame

$$P_0^t(\alpha) =: \tau_t$$

Seja $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$. $Z(\alpha(t)) = \tau_t Z(\alpha(0))$. Portanto $\frac{D}{dt} Z(\alpha(t)) = \frac{D}{dt}\left(\tau_t Z(\alpha(0))\right)$.

Exercício: Mostrem que $R_{X,Y} Z = \frac{D}{ds}\frac{D}{dt} \tau_{sY}^{-1} \tau_{tX}^{-1} \tau_{sY} \tau_{tX} Z$

Interp geométrica da id de Bianchi:



Comentário 02 Torção

$T(X,Y) = [X,Y] - D_X Y + D_Y X$ é chamado tensor de torção

(id nulo p/ conexão de Levi-Civita).

(i) $T \in \mathcal{T}^1_2(M)$

(ii) A primeira id de Bianchi fica

$$\sum_{\text{cíclico}} R_{X,Y} Z = \sum_{\text{cíclico}} \left[(D_X T)(Y,Z) + T(T(X,Y),Z) \right]$$

Segunda Identidade de Bianchi:

$$(D_X R_{Y,Z})V + (D_Y R_{Z,X})V + (D_Z R_{X,Y})V = 0$$

* Crucial p/ eq de Einstein

Comentário Torção:

$$\sum_{\text{cíclico}} \left(D_X R_{Y,Z} + R_{T(X,Y),Z} \right) V = 0$$

Definição O tensor de curvatura de Ricci é definido como

$$Ric := C^1_3(R) \in \tilde{\mathcal{I}}^0_2(M).$$

* O tensor de Ricci é simétrico

Def O escalar de curvatura é definido como

$$S = C_{12}(Ric)$$

Def Divergência

Seja $V \in \mathfrak{X}(M)$: $\operatorname{div} V := C(DV)$

Seja $A \in \mathcal{I}^0_2(M)$ simétrico: $\operatorname{div} A = C_{13}(DA) = C_{23}(DA) \in \mathfrak{X}^*(M)$

Corolário $2 \operatorname{div}(Ric) = DS = dS$

Prova: 2ª id de Bianchi.

Imediatamente,

$$\operatorname{div}\left(Ric - \frac{1}{2} S g\right) = 0$$

Tentativas de Einstein de definir uma equação de campo:

Princípios:

- Covariância: à época: eq de campo indep de sist coord

- Conservação de energia

Tentativas:

$Ric = KT$, onde T é o tensor energia-momentum

* Limite Newtoniano satisfeito

* Precessão do periélio de Mercúrio em acordo c/ observações

* $C_{12}(T) = 0$, necessariaᵗᵉ

Solução: $$Ric = -K\left(T - \frac{1}{2} g\, C_{12}(T)\right)$$

idêntico a

$$\boxed{Ric - \frac{1}{2} S g = KT}$$

Voss 1880
Ricci 1889
Bianchi 1902

* Einstein, Hilbert, F. Klein não conheciam as id de Bianchi em 1915!

* Conservação imposta como vínculo!

* Em outubro/1916, Einstein calculou $div(T) = 0$ por "força bruta"

Emmy Noether (1918)

→ div(G) é consequência da invariância da ação

$$S = \int R\sqrt{|\det g|}\, d^4x$$

sob difeomorfismos.

Fica estabelecido $G = KT$ como a Equação de Einstein,

& $\mathrm{div}(G) = \mathrm{div}(T) = 0$; $K = 8\pi$

* T tb é obtido a partir de uma ação

* Disputa Einstein – Hilbert

Covariância Geral

A TRG é geralmente covariante, ie, suas configurações (sols da eq de Einstein), funcional ação e EoM são equivariantes sob a ação do grupo de difeomorfismos agindo sobre a variedade.

Covariância Geral ⇒ Princípio de Equivalência de Einstein

1º: Limite de campo fraco

$$g = \eta + h \; ; \; \|h\| \ll 1 .$$

Eq de Einstein → $\square h = 2\kappa T$

O campo gravitacional é obtido nos símbolos de Christoffel, não no tensor métrico

2º Em uma vizinhança normal $\mathcal{U}$, pode-se definir um sist de coordenadas no qual $g = \eta$ ∴ $R = 0$; $Ric = 0$ ...

⇒ Sob um difeomorfismo, pode-se obter um sist de coord no qual, em um ponto, o campo grav seja nulo!

⇒ Localmente, energia de um campo gravitacional não é bem definida!

* Há definições globais no caso de espaços-tempos assintoticamente chatos.

Segunda aula

Recapitulando: $G := Ric - \frac{1}{2} S g = 8\pi T$

Covariância geral: equivariância sob Diff(M)

Limite Newtoniano ✓

Interação da luz c/ a gravitação: lenteamento grav, efeito Sachs-Wolfe, Doppler gravitacional

* Energia de um campo gravitacional não fica bem definida localmente!

- Espaços-tempos globalmente hiperbólicos:

(i) Causalidade: não há curvas causais fechadas

(ii) "compacto em diamantes": $\forall\, p, q \in M$, $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto

$\Rightarrow$ causalidade forte e todas as outras condições da "escada causal".

$\Rightarrow \exists$ função temporal de Cauchy:

$t \in \mathcal{F}(M)$, $g(\text{grad}\, t, \text{grad}\, t) < 0$, grad t orientado p/ o passado, sobrejetiva sobre $\mathbb{R}$ ao longo de qlq curva causal inextensível orientada p/ o futuro.

* Se v tangente a uma curva causal orientada p/ o futuro,

$$D_v t = dt(v) = g(v, \text{grad}\, t) > 0!$$

* As superfícies de nível de t são hipersuperfícies de Cauchy espaciais suaves.

- Σ é uma subvariedade de codimensão 1 cruzada uma vez por cada curva temporal inextensível.

- (M, g) é isomorfo a $(\mathbb{R} \times \Sigma, -f^2 dt^2 + g_t)$

$f > 0$ é suave em $\mathbb{R} \times N$ e g_t é uma família suave de tensores métricos Riemannianos nas superfícies de nível de t.

- Müller-Sánchez 11 : $f \equiv 1$

$\Rightarrow$ EDPs! Op evolução temporal de sols?

Espaços-tempos assintoticamente chatos:

(M, g) ; $M \supset M_{ext}$ diff $\mathbb{R}^n / B(R)$

coord $\{x^i\}_i$, $r := \left(\sum_i (x^i)^2\right)^{1/2}$, $h = g|_{M_{ext}}$, $\alpha > 0$, $k > 1$

$$\partial_{k_1} \cdots \partial_{k_\ell} (h_{ij} - \delta_{ij}) = \mathcal{O}(r^{-(\alpha - \ell)})$$

$$h_{ij} - \delta_{ij} = \mathcal{O}_k(r^{-\alpha}) \; ; \; K_{ij} = \mathcal{O}_{k-1}(r^{-1-\alpha})$$

Solução de Schwarzschild

Encontrada poucos meses após a publicação da RG

* Teo de Birkhoff : $g|_4$ solução esf sim, $n \geq 3$, no vácuo $(T=0)$ é da forma

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + V^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \,, \quad V^2 = 1 - \frac{2m}{r^{n-2}} \,, \; t \in \mathbb{R},\; r \in (2m, \infty),\; m > 0$$

extensão: $v := t + \int^r \frac{1}{V^2} = t + r + 2m \ln(r - 2m)$

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2 dv\, dr + r^2 d\Omega^2 \,, \; v \in \mathbb{R},\; r \in (0, \infty)$$

* Uma curva tipo tempo parametrizada por

$$\gamma(s) = (v(s), r(s), \theta(s), \varphi(s))$$

- se $\dot{v} > 0$ em curvas orientadas p/ futuro, irão p/ $r < 2m$!

- Espaços-tempos estacionários

Assint chato, $\exists X \in \mathfrak{X}(M) \mid \mathcal{L}_X g = 0$, X é tipo tempo na região assintótica.

* Horizonte de eventos: contornos de regiões cronologicamente conectadas à região assintótica:

Difeomorfismos gerados por X: ϕ_t

$$M_{ext} := \bigcup_t \phi_t(M_{ext}) \; ; \; \langle\langle M_{ext} \rangle\rangle := I^+(M_{ext}) \cap I^-(M_{ext})$$

domínio de comunicações externas

$$B = M \setminus I^-(M_{ext}) \; ; \quad \mathcal{H}^+ = \partial B$$

$$W = M \setminus I^+(M_{ext}) \; ; \quad \mathcal{H}^- = \partial W$$

Schwarzschild, novamente

(a) extensão maximal do espaço-tempo

(b) localização dos horizontes

(a) coordenadas $u = t - r_*$, $r_* = r + 2m \ln (r - 2m)$

$v = t + r_*$

$$ds^2 = -\frac{2m\, e^{-r/2m}}{r}\, e^{(v-u)/4m}\, du\, dv + r^2 d\Omega^2$$

$\lim_{r \to 2m} \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = \pm \infty$. Definindo $U = -e^{-u/4m}$, $V = e^{v/4m}$, remove-se termos singulares

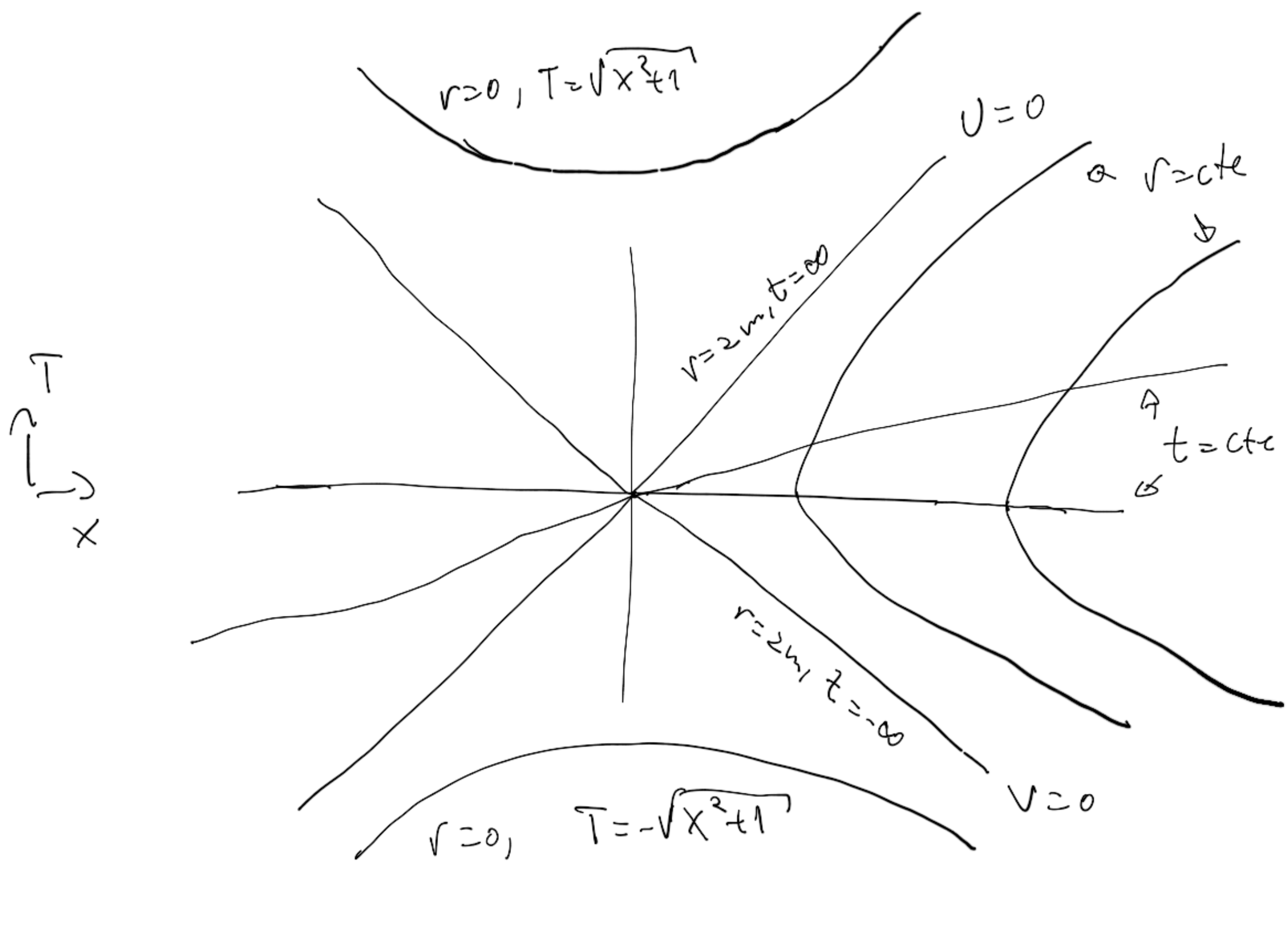
$$ds^2 = -\frac{32m^3 e^{-r/2m}}{r}\, dU\, dV + r^2 d\Omega^2 \qquad \lim_{r \to 2m} \begin{cases} U \\ V \end{cases} = \begin{cases} 0_- \\ 0_+ \end{cases}$$

* g_{ij} são funções real-analíticas de U e V! Extensão p/ todos os valores reais!

$$T := \frac{V+U}{2}\ ; \quad X = \frac{V-U}{2} \quad \therefore \quad ds^2 = \frac{32m^3 e^{-r/2m}}{r}\left(-dT^2+dX^2\right)+r^2 d\Omega^2$$

$$\text{onde } \left(\frac{r}{2m}-1\right)e^{r/2m} = X^2-T^2 \ ; \quad \frac{t}{2m} = \ln\left(\frac{X+T}{X-T}\right)$$

Diagrama de Kruskal

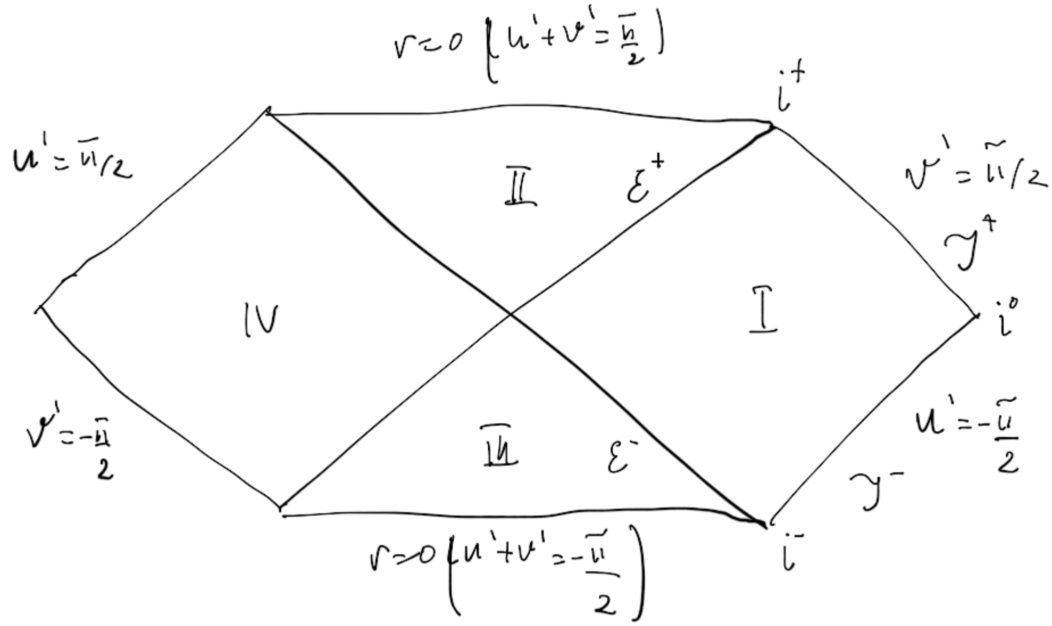


* curvas tipo luz a 45°!

Diagrama de Penrose

* estrutura assintótica do espaço-tempo

$$v' := \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{2m}}\right) \; ; \; u' := \arctan\left(\frac{U}{\sqrt{2m}}\right)$$



* curvas tipo luz a 45°

$B = \mathrm{II}$; região IV: assintoticamente chata, causalmente desconectada de I

$W = \mathrm{III}$

$\mathcal{J}^{\pm}$: future null infinity
(past)

Horizontes de eventos

$i^0 = M_{ext}$; $M_{ext} : \mathcal{J}^+ \cup i^0 \cup \mathcal{J}^-$; $\langle\langle M_{ext} \rangle\rangle = I$; vetor de Killing ∂_t

$\mathcal{E}^{\pm} = \partial \langle\langle M_{ext} \rangle\rangle \cap I^{\pm}(M_{ext})$; $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-$

Horizonte de Killing $g(\partial_t|_{\mathcal{E}}, \partial_t|_{\mathcal{E}}) = 0$

No ponto $T = X = 0$, $\partial_t = 0 \Rightarrow$ Horizonte de Killing bifurcado.

Problemas em aberto

* Estabilidade de espaços-tempos
  - Minkowski ✓ (pert nas ci originam um etgh geod compl)
  - Schwarzschild ✗ pert geram momento angular
  - Kerr ?
  - outros ?
* Definir singularidade
* Censura cósmica?

* Tópicos não tratados

- CMC surfaces
- Cauchy problem
- Energia do campo gravitacional
- Superfícies marginal^{te} armadilhadas

refs:

- Mathematical GR: A Sampler
  Chrusciel, Galloway, Pollack, Bull AMS 47 (2010), 567
- An Invitation to Lorentzian Geometry
  Müller, Sánchez, Jahr Dsch Math-Ver (2014) 115:153
- Subtle is the Lord
  A. Pais
- Semi-Riemannian Geometry
  O'Neill
- General Relativity
  Wald
- The Large Scale Structure of st
  Hawking, Ellis