MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

29 de novembre de 2013

Prova 2 — $\boxed{\mathbf{A}}$

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \big\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
- Um *ponto crítico* de uma função diferenciável $f(x,y)$ é um ponto (x_0, y_0) do domínio de f onde se anula o gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Dada a função* $f(x,y) = -2x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$*, o que podemos dizer sobre o ponto* $(1,1)$*?*

(a) não é um ponto crítico da f;
(b) é um ponto de mínimo global da f;
(c) é um máximo local para f;
(d) é um mínimo local da f;
(e) é um ponto de sela para f.

Questão 2. *Se os vértices de um triângulo são* $(0,0)$, $(2,1)$ *e* $(1,3)$*, determine o punto* P *do triângulo tal que a soma dos quadrados das distâncias aos vértices seja mínima.*

(a) $(4/3, 1)$;
(b) $(4, 3)$;
(c) $(1, 2/3)$;
(d) $(1, 4/3)$;
(e) $(2/3, 1)$.

Questão 3. *Seja* f *uma função diferenciável,* $f(x_0, y_0) = 1$*,* $\gamma(t)$ *uma curva diferenciável, com* $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$*,* $\gamma'(t_0) = (-1, 2)$*,* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$*,* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$*,* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0) = 3$*. Seja* $g(t) = (f \circ \gamma)(t) + t$*. Calcule* $g'(t_0)$*.*

(a) $g'(t_0) = 6$;
(b) $g'(t_0) = 5$;
(c) $g'(t_0) = -6$;
(d) $g'(t_0) = -3$;
(e) $g'(t_0) = 0$.

Questão 4. *Determine o conjunto de pontos em que a função* f *é diferenciável:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \textit{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
(b) $\mathbb{R}^2$;
(c) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$;
(e) f é contínua, mas não é diferenciável.

Questão 5. *Quais são os pontos críticos da* $f(x, y) = 2xy - 2x^3 - 2y^3$*?*

(a) $(0, 0)$;
(b) $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
(c) $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$;
(d) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$;
(e) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Questão 6. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = 2x^4 + 2y^4 - 4x^2 - 4y^2.$$

(a) f não possui pontos críticos;
(b) $(0, 0)$ e $(1, 1)$;
(c) $(0, 0)$, $(1, 1)$, e $(-1, -1)$;
(d) $(0, 0)$;
(e) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$.

Questão 7. *Determine o valor máximo da soma dos cossenos dos ângulos de um triângulo.*

(a) $\frac{4}{3}$;
(b) $\frac{3}{2}$;
(c) 3;
(d) $\frac{2}{3}$;
(e) 1.

Questão 8. *Determine o máximo* M *e o mínimo* m *da função* $f(x, y) = 6x - 2y$ *em* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) $M = \sqrt{10}$, $m = -2\sqrt{5}$;
(b) $M = 20$, $m = -20$;
(c) $M = \sqrt{5}$, $m = -\sqrt{5}$;
(d) $M = 2\sqrt{10}$, $m = -2\sqrt{10}$;
(e) $M = 2\sqrt{5}$, $m = -2\sqrt{5}$.

Questão 9. *Seja $\gamma(t)$ uma **curva de nível** da função $f(x,y)$. Seja $g(x,y) = e^{f(x,y)}$ e $h(t) = (g \circ \gamma)(t) + 2t$. Calcule $h'(t)$.*

(a) h não é derivável;
(b) $h'(t) = e^{\nabla f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)}$;
(c) $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot e^{f(\gamma(t))}$;
(d) $h'(t) = 0$;
(e) $h'(t) = 2$.

Questão 10. *Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ mais próximo da origem.*

(a) $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0)$;
(b) $(2, 0, 0)$;
(c) $(1, 1, -1)$;
(d) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$;
(e) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

Questão 11. *Calcule a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ para a função $f(x,y) = x^2 e^{xy}$.*

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$;
(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (3x^2 + x^3 y)e^{xy}$;
(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (x^2 + x^3 y)e^{xy}$;
(d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (3x^2 + x^2 y)e^{xy}$;
(e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = (3x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$.

Questão 12. *Determine um vetor ortogonal à curva $ye^x - xe^y = e^2 - 2e$ no ponto $(2, 1)$.*

(a) (e, e^2);
(b) $(e^2 - e, e^2 - 2e)$;
(c) $(e^2 - e, 2e - e^2)$;
(d) $(e^2 - e, e^2 - 2e)$;
(e) $(2e + e^2, e - e^2)$.

Questão 13. *Determine em qual direção* $\vec{u}$ *a função* $f(x,y) = xy^2$ *tem derivada direcional* $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ *de valor* ***mínimo****.*

(a) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

(b) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

(c) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

(d) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

(e) $\vec{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Questão 14. *Calcule a derivada* $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ *da função* $f(x,y,z) = e^{xyz}$*.*

(a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(x+y+z)$;

(b) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1+2xyz+x^2y^2z^2)$;

(c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$;

(d) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1+xyz+x^2y^2z^2)$;

(e) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1+3xyz)$.

Questão 15. *Determine o máximo* M *e o mínimo* m *da função* $f(x,y) = y^2 - x^2 + 1$ *no conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$*.*

(a) $M = 4\sqrt{2}$, $m = -4\sqrt{2}$;

(b) $M = \sqrt{2}$, $m = -4$;

(c) $M = 5$, $m = -3$;

(d) $M = 4$, $m = -2\sqrt{2}$;

(e) $M = 4$, $m = -4$.

Questão 16. *Seja* $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$*. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) O ponto $(2,1)$ é um mínimo da f;

(b) O ponto $(1,2)$ é um máximo da f;

(c) O ponto $(2,1)$ é um ponto de sela da f;

(d) O ponto $(2,1)$ é um máximo da f;

(e) O ponto $(1,2)$ é um mínimo da f.

Questão 17. *Seja f uma função diferenciável numa vizinhança de (x_0, y_0), cujo Hessiano $H^f(x_0, y_0)$ é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local;
(b) (x_0, y_0) é um ponto de sela;
(c) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) não é um máximo.;
(d) (x_0, y_0) é um ponto de máximo local;
(e) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um máximo..

Questão 18. *Qual é o enunciado correto do Teorema de Weierstrass?*

(a) se f é contínua em (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0);
(b) se (x_0, y_0) é um ponto de máximo de f em A, então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f;
(c) se f é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua em (x_0, y_0);
(d) se $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e A é compacto, então f tem máximo e mínimo em A
(e) se (x_0, y_0) não é um máximo ou um mínimo para f, então (x_0, y_0) é um ponto de sela para f.

Questão 19. *Descreva as curvas de nível da função $f(x, y) = \dfrac{y}{x-1}$.*

(a) são hipérbolas;
(b) são retas que passam por $(1, 0)$ menos o ponto $(1, 0)$
(c) são circunferências centradas no ponto $(1, 0)$;
(d) são retas paralelas à retas $x = 1$ e $y = 0$;
(e) são retas por $(0, 1)$.

Questão 20. *Sabendo que f é uma função diferenciável em (x_0, y_0), que $2\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, onde $\vec{u}$ é a direção $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.*

(a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
(b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$;
(d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — $\boxed{\textbf{A}}$

29 de novembro de 2013

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**