# MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

18 de Outubro de 2013

## Prova 1 — $\boxed{\textbf{D}}$

Nome: ______________________________________________

Número USP: ________________________________________

Assinatura: _________________________________________

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
- $\sin x$ é a função "seno de $x$"; $\ln x$ é a função "logaritmo natural de $x$".
- Para $p \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, $B(p, r)$ denota a bola aberta de centro $p$ e raio $r$ em $\mathbb{R}^2$.
- Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, o símbulo $A^o$ denota seu *interior*, ou seja, o conjunto dos pontos internos de $A$.
- sinh e cosh são as funções hiperbólicas "seno hiperbólico" e "cosseno hiperbólico". A função inversa de sinh é denotada por $\sinh^{-1}$.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME***
***NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** *Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico da função $f(x) = \ln x$, com $x \in [1, 7]$, em torno do eixo $y$.*

(a) $\pi\left(34\sqrt{2} + \sinh^{-1}(e^7) - \sinh^{-1}(1)\right)$;
(b) $\pi\left(34\sqrt{2} + \sinh^{-1}(7)\right)$;
(c) $\pi\left(34\sqrt{2} + \sinh^{-1}(7) - \sinh^{-1}(1)\right)$ ;
(d) $\pi\left(34\sqrt{2} + \sinh(7) - \sinh(1)\right)$;
(e) $\pi\left(34\sqrt{7} + \sinh^{-1}(7) - \sinh^{-1}(1)\right)$.

**Questão 2.** *Calcule o volume $V$ do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo $x$ do gráfico da função $f(x) = x^2$, com $-1 \leq x \leq 1$*

(a) $V = \frac{1}{5}\pi$;
(b) $V = \frac{2}{5}$;
(c) $V = \frac{2}{3}$;
(d) $V = \frac{2}{5}\pi$;
(e) $V = \frac{2}{3}\pi$.

**Questão 3.** *Calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ da função*

$$f(x, y) = e^{xy}\cos(x^2 + y^2).$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy}\cos(x^2 + y^2) - e^{xy}\sin(x^2 + y^2)$;
(b) $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}\cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy}\sin(x^2 + y^2)$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y\sin(x^2 + y^2)$;
(d) $\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{xy}\cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy}\sin(x^2 + y^2)$;
(e) $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xye^{xy}\sin(x^2 + y^2)$.

**Questão 4.** *Calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ da função:*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & se\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$;
(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 + \dfrac{x + y}{(x^2 + y^2)^2}$;
(d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$;
(e) $f$ não admite derivadas parciais em $(0, 0)$.

**Questão 5.** *Sejam $f$ e $g$ duas funções de uma variável, ambas deriváveis; definimos $F(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Qual é a derivada parcial $\dfrac{\partial F}{\partial x}$?*

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g'(y)$;

(b) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) + g(y)$;

(c) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f(x) \cdot g'(y)$;

(d) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y)$;

(e) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$.

**Questão 6.** *Se $A \subset \mathbb{R}^2$ e $p \in A$, quando é que $p$ é um* ponto interno *de $A$?*

(a) Quando $p$ não pertence ao complementar de $A$;

(b) Quando existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$ ;

(c) Quando $p$ não é um ponto externo de $A$;

(d) Quando para todo $r > 0$ a bola $B(p,r)$ está contida em $A$;

(e) Quando existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset A$.

**Questão 7.** *Calcule o volume $V$ do sólido obtido pela rotação em torno do eixo $y$ da região $R$ dada por:*

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 10,\ 0 \leq y \leq \tfrac{1}{x}\right\}.$$

(a) $V = 20\pi$;

(b) $V = 5\pi$;

(c) $V = 2\pi$;

(d) $V = 18\pi$;

(e) $V = \frac{5}{2}\pi$.

**Questão 8.** *Calcule a integral indefinida $\displaystyle\int \sin x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.*

(a) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$;

(b) $\frac{1}{6}\sin^2 x \cos^3 x + C$;

(c) $-\frac{1}{6}\sin^2 x \cos^3 x + C$;

(d) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$;

(e) $\frac{1}{2}\sin^2 x \cos^3 x + C$.

**Questão 9.** *Quais são as coordenadas polares $(\rho, \theta)$ do ponto $P$ cujas coordenadas cartesianas são $(-1, 1)$?*

(a) $\rho = 2$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$;
(b) $\rho = 2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
(c) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$;
(d) $\rho = -2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
(e) $\rho = -\sqrt{2}$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

**Questão 10.** *Que letra do alfabeto grego é: $\Lambda$?*

(a) delta minúsculo ;
(b) Gamma maiúsculo;
(c) Lambda maiúsculo;
(d) lambda minúsculo ;
(e) Delta maiúsculo.

**Questão 11.** *Determine o interior $A^o$ do conjunto*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\}.$$

(a) $A^o = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\right\}$;
(b) $A^o = A$;
(c) $A^o = \emptyset$;
(d) $A^o = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\right\}$;
(e) $A^o = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\right\}$.

**Questão 12.** *Calcule o limite* $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

(a) $L = +\infty$;
(b) $L = 1$;
(c) $L = 0$;
(d) O limite não existe;
(e) $L = \frac{1}{2}$.

**Questão 13.** *Qual das seguintes afirmações sobre o conjunto:*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$$

*é verdadeira?*

(a) $A$ é limitado;
(b) $A$ é vazio;
(c) $A$ é compacto;
(d) $A$ é aberto;
(e) $A$ é fechado.

**Questão 14.** *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(1) *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então $x\,F(x)$ é uma primitiva de $F(x) + x\,f(x)$.*
(2) $\displaystyle\int f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right).$
(3) *Se $F(x)$ é uma primitva da $f(x)$, $x > 0$, então $F\big(\ln(x)\big)$ é uma primitiva de $f\big(\ln(x)\big)$*
(4) *Se $F$ é uma primitiva de $f$, antão para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ é uma primitiva de $f$.*
(5) *Se $F$ é uma primitiva de $f$, antão para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $F$ é uma primitiva também de $f + c$.*

(a) As afirmações verdadeiras são a (4) e a (5). As demais são falsas;
(b) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (4). As demais são falsas;
(c) As afirmações verdadeiras são a (1), a (4) e a (5). As demais são falsas;
(d) As afirmações verdadeiras são a (2), a (3) e a (5). As demais são falsas;
(e) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (5). As demais são falsas.

**Questão 15.** *Se $C \subset \mathbb{R}^n$, quando é que $C$ é* fechado*?*

(a) Quando todo ponto do complementar de $C$ é interno ao complementar de $C$;
(b) Quando $C$ não é aberto;
(c) Quando existe $p \in C$ que é interno a $C$;
(d) Quando nenhum ponto de $C$ é interno a $C$;
(e) Quando todo ponto de $C$ é interno a $C$.

**Questão 16.** *Calcule a seguinte integral definida:*

$$A = \int_0^{\pi} x \sin(x^2 + 1)\,\mathrm{d}x.$$

(a) $A = \frac{1}{2}\left[\cos(1) - \cos\left(1 + \pi^2\right)\right]$;

(b) $A = \cos(1) - \cos\left(1 + \pi^2\right)$;

(c) $A = \frac{1}{2}\left[\sin(1) - \sin\left(1 + \pi^2\right)\right]$;

(d) $A = 0$;

(e) $A = \frac{1}{2}$.

**Questão 17.** *Qual é o domínio* $A \subset \mathbb{R}^2$ *da função* $f(x, y) = \ln(xy + 1)$*?*

(a) $A = \mathbb{R}^2$;

(b) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\right\}$;

(c) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\right\}$;

(d) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\right\}$;

(e) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\right\}$.

**Questão 18.** *Calcule o limite:*

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2 + \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

(a) O limite não existe;

(b) $L = 1$;

(c) $L = (0, 0)$;

(d) $L = +\infty$;

(e) $L = 0$.

**Questão 19.** *Calcule a seguinte integral definida:*

$$A = \int_0^{\ln(2)} x\, e^x\,\mathrm{d}x.$$

(a) $A = 1$;

(b) $A = \ln 2$;

(c) $A = 2\ln(2)$;

(d) $A = \ln(2) - 1$;

(e) $A = \ln(4) - 1$.

**Questão 20.** *Calcule a área da superfície de revolução gerada pela rotação do gráfico da função* $f(x) = \frac{1}{3}x^3$*, com* $x \in [0,3]$*, em torno do eixo* $x$*.*

(a) $\dfrac{\pi}{9}\left(82\sqrt{82} - 1\right)$ ;

(b) $\dfrac{\pi}{3}$;

(c) $\dfrac{\pi}{9}\left(9^3 - 1\right)$;

(d) $\pi\left(82\sqrt{82} - 1\right)$;

(e) $\dfrac{2\pi}{9}$.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — $\boxed{\textbf{D}}$

18 de Outubro de 2013

Nome: ______________________________________________

Número USP: ________________________________________

Assinatura: _________________________________________

## Folha de Respostas

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | a | b | c | d | e |
| **2** | a | b | c | d | e |
| **3** | a | b | c | d | e |
| **4** | a | b | c | d | e |
| **5** | a | b | c | d | e |
| **6** | a | b | c | d | e |
| **7** | a | b | c | d | e |
| **8** | a | b | c | d | e |
| **9** | a | b | c | d | e |
| **10** | a | b | c | d | e |
| **11** | a | b | c | d | e |
| **12** | a | b | c | d | e |
| **13** | a | b | c | d | e |
| **14** | a | b | c | d | e |
| **15** | a | b | c | d | e |
| **16** | a | b | c | d | e |
| **17** | a | b | c | d | e |
| **18** | a | b | c | d | e |
| **19** | a | b | c | d | e |
| **20** | a | b | c | d | e |

**Deixe em branco.**

| Corretas | Erradas | Nota |
|---|---|---|
| | | |