MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

25 de Novembro de 2011

Prova SUB — $\boxed{\mathbf{D}}$

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **REGRA DA SUB.** *A prova é aberta a todos; o aluno tem direito de entregar ou não a folha de respostas. Se a entregar, necessariamente a nota da SUB será considerada para o cálculo da nota final. Nesse caso, a nota final será calculada como a média aritmética entre a nota da SUB e a maior das notas entre a P1 e a P2.*
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função "seno de x"; $\ln x$ é a função "logaritmo natural de x".
- Uma *direção* é um vetor de comprimento 1.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Dada a função* $f(x,y) = -2x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y$, *o que podemos dizer sobre o ponto* $(1,1)$*?*

(a) é um mínimo local da f;
(b) não é um ponto crítico da f;
(c) é um máximo local para f;
(d) é um ponto de sela para f;
(e) é um ponto de mínimo global da f.

Questão 2. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em p, então f não é diferenciável em p;
(b) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \mathbb{R}^2$, então f admite derivadas parciais em p;
(c) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em p, então f é diferenciável em p;
(d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em p;
(e) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f não é diferenciável em p.

Questão 3. *Calcule o limite:*

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y + 3xy^2}{x^2 + y^2}.$$

(a) $L = (0,0)$;
(b) O limite não existe;
(c) $L = 0$;
(d) $L = 1$;
(e) $L = +\infty$.

Questão 4. *Determine o ponto do plano* $2x - y + z = 4$ *mais próximo da origem.*

(a) $(1, -1, 1)$;
(b) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$;
(c) $(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, 0)$;
(d) $(2, 0, 0)$;
(e) $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Questão 5. *Sabendo que f é uma função diferenciável em (x_0, y_0), que $2\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, onde $\vec{u}$ é a direção $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.*

(a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
(b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$;
(d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$;
(e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Questão 6. *Seja $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Calcule a derivada $F'(x)$.*

(a) $F'(x) = 2xe^{x^2}$;
(b) $F'(x) = f(x) - f(1)$;
(c) F é contínua, mas não é derivável;
(d) $F'(x) = e^{x^2}$;
(e) $F'(x) = \int_1^x te^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Questão 7. *Qual é o domínio $A \subset \mathbb{R}^2$ da função $f(x, y) = \sqrt{xy + 1}$?*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\}$;
(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$;
(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$;
(d) $A = \mathbb{R}^2$;
(e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$.

Questão 8. *Seja f uma função diferenciável numa vizinhança de (x_0, y_0), cujo Hessiano $H^f(x_0, y_0)$ é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) (x_0, y_0) é um ponto de sela;
(b) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um mínimo.;
(c) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um máximo.;
(d) (x_0, y_0) é um ponto de máximo local;
(e) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local.

Questão 9. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x,y) = 2x^4 + 2y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 1.$$

(a) f não possui pontos críticos;
(b) $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ e $(-1,-1)$;
(c) $(0,0)$;
(d) $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,-1)$;
(e) $(0,0)$, $(1,1)$, e $(-1,-1)$.

Questão 10. *Calcule a derivada* $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ *da função* $f(x,y,z) = e^{xyz}$.

(a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + 2xyz + x^2y^2z^2)$;
(b) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz)$;
(c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + xyz + x^2y^2z^2)$;
(d) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(x + y + z)$;
(e) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$.

Questão 11. *Seja f uma função diferenciável, $f(x_0,y_0) = 1$, $\gamma(t)$ uma curva diferenciável, com $\gamma(t_0) = (x_0,y_0)$, $\gamma'(t_0) = (1,-2)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) = 3$. Seja $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Calcule $g'(t_0)$.*

(a) $g'(t_0) = 4$;
(b) $g'(t_0) = -4$;
(c) $g'(t_0) = 0$;
(d) $g'(t_0) = 6$;
(e) $g'(t_0) = -6$.

Questão 12. *Calcule a derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *da função:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \textit{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$;
(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 + \dfrac{x+y}{(x^2+y^2)^2}$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$;
(d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$;
(e) f não admite derivadas parciais em $(0,0)$.

Questão 13. *Quais são as coordenadas polares* (ρ, θ) *do ponto* P *cujas coordenadas cartesianas são* $(1, -1)$*?*

(a) $\rho = -2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
(b) $\rho = -\sqrt{2}$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
(c) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$;
(d) $\rho = 2$, $\theta = \frac{7}{4}\pi$;
(e) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{7}{4}\pi$.

Questão 14. *Qual é o enunciado correto do Teorema Fundamental do Cálculo Integral?*

(a) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;
(b) Se $F(x) = \int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t$ é contínua, então f é derivável, e $f'(x) = F(x)$ para todo x;
(c) Se f é uma função derivável, então $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
(d) Se f é derivável, então $\int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t = f'(x)$ para todo x;
(e) Se f é uma função contínua, então $F(x) = \int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t$ é uma função derivável, e $F'(x) = f(x)$ para todo x.

Questão 15. *Calcule a integral indefinida* $\displaystyle\int \sin x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

(a) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$;
(b) $\frac{1}{6}\sin^2 x \cos^3 x + C$;
(c) $\frac{1}{2}\sin^2 x \cos^3 x + C$;
(d) $-\frac{1}{6}\sin^2 x \cos^3 x + C$;
(e) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

Questão 16. *Sejam f e g duas funções de uma variável, ambas deriváveis; definimos $F(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Qual é a derivada parcial $\dfrac{\partial F}{\partial y}$?*

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f(x) \cdot g'(y)$;
(b) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) + g(y)$;
(c) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$;
(d) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g'(y)$;
(e) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y)$.

Questão 17. *Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x,y) = 2y^2 - x^2$ no conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.*

(a) $M = 4\sqrt{2}$, $m = -4\sqrt{2}$;
(b) $M = 4\sqrt{2}$, $m = -2\sqrt{2}$;
(c) $M = 8$, $m = -2\sqrt{2}$;
(d) $M = 2\sqrt{2}$, $m = -4$;
(e) $M = 8$, $m = -4$.

Questão 18. *Qual das seguintes afirmações sobre máximos e mínimos vinculados é verdadeira?*

(a) Dadas funções diferenciáveis $f(x,y)$ e $g(x,y)$, se (x_0,y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x,y) = 0$, então $\nabla f(x_0,y_0)$ é proporcional a $\nabla g(x_0,y_0)$;
(b) Dadas funções diferenciáveis $f(x,y)$ e $g(x,y)$, se (x_0,y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x,y) = 0$, então $\nabla f(x_0,y_0)$ é nulo.;
(c) Dadas funções diferenciáveis $f(x,y)$ e $g(x,y)$, se (x_0,y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x,y) = 0$, então o Hessiano da f em (x_0,y_0) é proporcional ao Hessiano da g em (x_0,y_0);
(d) Dadas funções diferenciáveis $f(x,y)$ e $g(x,y)$, se (x_0,y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x,y) = 0$, então $\nabla f(x_0,y_0)$ e $\nabla g(x_0,y_0)$ são nulos.;
(e) Dadas funções diferenciáveis $f(x,y)$ e $g(x,y)$, se (x_0,y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x,y) = 0$, então $\nabla f(x_0,y_0)$ é ortogonal a $\nabla g(x_0,y_0)$.

Questão 19. *Determine em qual direção* $\vec{u}$ *a função* $f(x,y) = xy^2$ *tem derivada direcional* $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ *de valor **máximo**.*

(a) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

(b) $\vec{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

(c) $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

(d) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;

(e) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Questão 20. *Calcule o volume* V *do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo* x *do gráfico da função* $f(x) = 2x^2$*, com* $-1 \leq x \leq 1$

(a) $V = \frac{8}{5}\pi$;

(b) $V = \frac{3}{5}$;

(c) $V = \frac{8}{3}\pi$;

(d) $V = \frac{5}{3}$;

(e) $V = \frac{4}{5}\pi$.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

Prova SUB — $\boxed{\textbf{D}}$

25 de Novembro de 2011

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**