

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

25 de Novembro de 2011

Prova SUB — **B**

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto (0.1).*
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **REGRA DA SUB.** *A prova é aberta a todos; o aluno tem direito de entregar ou não a folha de respostas. Se a entregar, necessariamente a nota da SUB será considerada para o cálculo da nota final. Nesse caso, a nota final será calculada como a média aritmética entre a nota da SUB e a maior das notas entre a P1 e a P2.*
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função “seno de x ”; $\ln x$ é a função “logaritmo natural de x ”.
- Uma *direção* é um vetor de comprimento 1.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

Questão 1. Qual é o enunciado correto do Teorema Fundamental do Cálculo Integral?

- (a) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$;
- (b) Se f é uma função derivável, então $\int_a^b f(x) dx = 0$;
- (c) Se f é uma função contínua, então $F(x) = \int_p^x f(t) dt$ é uma função derivável, e $F'(x) = f(x)$ para todo x ;
- (d) Se $F(x) = \int_p^x f(t) dt$ é contínua, então f é derivável, e $f'(x) = F(x)$ para todo x ;
- (e) Se f é derivável, então $\int_p^x f(t) dt = f'(x)$ para todo x .

Questão 2. Dada a função $f(x, y) = -2x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y$, o que podemos dizer sobre o ponto $(1, 1)$?

- (a) não é um ponto crítico da f ;
- (b) é um mínimo local da f ;
- (c) é um ponto de sela para f ;
- (d) é um máximo local para f ;
- (e) é um ponto de mínimo global da f .

Questão 3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em p , então f é diferenciável em p ;
- (b) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \mathbb{R}^2$, então f admite derivadas parciais em p ;
- (c) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f não é diferenciável em p ;
- (d) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em p , então f não é diferenciável em p ;
- (e) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em p .

Questão 4. Calcule o limite:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2y + 3xy^2}{x^2 + y^2}.$$

- (a) O limite não existe;
- (b) $L = 0$;
- (c) $L = +\infty$;
- (d) $L = (0, 0)$;
- (e) $L = 1$.

Questão 5. Qual das seguintes afirmações sobre máximos e mínimos vinculados é verdadeira?

- (a) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então o Hessiano da f em (x_0, y_0) é proporcional ao Hessiano da g em (x_0, y_0) ;
- (b) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal a $\nabla g(x_0, y_0)$;
- (c) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é proporcional a $\nabla g(x_0, y_0)$;
- (d) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é nulo.;
- (e) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são nulos..

Questão 6. Determine em qual direção \vec{u} a função $f(x, y) = xy^2$ tem derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$ de valor **máximo**.

- (a) $\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;
- (b) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
- (c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
- (d) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
- (e) $\vec{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Questão 7. Quais são as coordenadas polares (ρ, θ) do ponto P cujas coordenadas cartesianas são $(1, -1)$?

- (a) $\rho = -\sqrt{2}$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
- (b) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{7}{4}\pi$;
- (c) $\rho = 2$, $\theta = \frac{7}{4}\pi$;
- (d) $\rho = -2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
- (e) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

Questão 8. Qual é o domínio $A \subset \mathbb{R}^2$ da função $f(x, y) = \sqrt{xy + 1}$?

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$;
- (b) $A = \mathbb{R}^2$;
- (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\}$;
- (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$;
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$.

Questão 9. Sabendo que f é uma função diferenciável em (x_0, y_0) , que $2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$, calcule a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, onde \vec{u} é a direção $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

- (a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$;
- (b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$;
- (c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
- (e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Questão 10. Sejam f e g duas funções de uma variável, ambas deriváveis; definimos $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$. Qual é a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial y}$?

- (a) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$;
- (b) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g'(y)$;
- (c) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y)$;
- (d) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) + g(y)$;
- (e) $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x) \cdot g'(y)$.

Questão 11. Seja $F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$. Calcule a derivada $F'(x)$.

- (a) $F'(x) = e^{x^2}$;
- (b) $F'(x) = \int_1^x te^{t^2} dt$;
- (c) F é contínua, mas não é derivável;
- (d) $F'(x) = f(x) - f(1)$;
- (e) $F'(x) = 2xe^{x^2}$.

Questão 12. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x, y) = 2x^4 + 2y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 1.$$

- (a) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$;
- (b) $(0, 0)$, $(1, 1)$, e $(-1, -1)$;
- (c) $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$;
- (d) $(0, 0)$;
- (e) f não possui pontos críticos.

Questão 13. *Calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ da função:*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$;
- (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$;
- (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 + \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^2}$;
- (d) f não admite derivadas parciais em $(0, 0)$;
- (e) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

Questão 14. *Calcule o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x do gráfico da função $f(x) = 2x^2$, com $-1 \leq x \leq 1$*

- (a) $V = \frac{4}{5}\pi$;
- (b) $V = \frac{5}{3}$;
- (c) $V = \frac{8}{3}\pi$;
- (d) $V = \frac{8}{5}\pi$;
- (e) $V = \frac{3}{5}$.

Questão 15. *Calcule a integral indefinida $\int \sin x \cos^2 x \, dx$.*

- (a) $-\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$;
- (b) $\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$;
- (c) $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$;
- (d) $\frac{1}{2} \sin^2 x \cos^3 x + C$;
- (e) $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

Questão 16. Seja f uma função diferenciável, $f(x_0, y_0) = 1$, $\gamma(t)$ uma curva diferenciável, com $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma'(t_0) = (1, -2)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 3$. Seja $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Calcule $g'(t_0)$.

- (a) $g'(t_0) = 4$;
- (b) $g'(t_0) = -4$;
- (c) $g'(t_0) = -6$;
- (d) $g'(t_0) = 6$;
- (e) $g'(t_0) = 0$.

Questão 17. Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x, y) = 2y^2 - x^2$ no conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

- (a) $M = 8, m = -4$;
- (b) $M = 4\sqrt{2}, m = -2\sqrt{2}$;
- (c) $M = 4\sqrt{2}, m = -4\sqrt{2}$;
- (d) $M = 2\sqrt{2}, m = -4$;
- (e) $M = 8, m = -2\sqrt{2}$.

Questão 18. Calcule a derivada $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ da função $f(x, y, z) = e^{xyz}$.

- (a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(x + y + z)$;
- (b) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz)$;
- (c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 2xyz + x^2y^2z^2)$;
- (d) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + xyz + x^2y^2z^2)$;
- (e) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$.

Questão 19. Determine o ponto do plano $2x - y + z = 4$ mais próximo da origem.

- (a) $(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$;
- (b) $(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, 0)$;
- (c) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$;
- (d) $(2, 0, 0)$;
- (e) $(1, -1, 1)$.

Questão 20. *Seja f uma função diferenciável numa vizinhança de (x_0, y_0) , cujo Hessiano $H^f(x_0, y_0)$ é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local;
- (b) (x_0, y_0) é um ponto de sela;
- (c) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um máximo.;
- (d) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um mínimo.;
- (e) (x_0, y_0) é um ponto de máximo local.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

Prova SUB — **B**

25 de Novembro de 2011

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota