

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

14 de Outubro de 2011

Prova 1 — **D**

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, e  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pares ordenados de números reais:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- $\sin x$  é a função “seno de  $x$ ”;  $\ln x$  é a função “logaritmo natural de  $x$ ”.
- Para  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $r > 0$ ,  $B(p, r)$  denota a bola aberta de centro  $p$  e raio  $r$  em  $\mathbb{R}^2$ .

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

**Questão 1.** Se  $C \subset \mathbb{R}^n$ , quando é que  $C$  é fechado?

- (a) Quando todo ponto de  $C$  é interno a  $C$ ;
- (b) Quando todo ponto do complementar de  $C$  é interno ao complementar de  $C$ ;
- (c) Quando  $C$  não é aberto;
- (d) Quando nenhum ponto de  $C$  é interno a  $C$ ;
- (e) Quando existe  $p \in C$  que é interno a  $C$ .

**Questão 2.** Calcule o limite:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y + yx^2}{x^2 + y^2}.$$

- (a)  $L = (0, 0)$ ;
- (b)  $L = 1$ ;
- (c)  $L = +\infty$ ;
- (d) O limite não existe;
- (e)  $L = 0$ .

**Questão 3.** Qual é o enunciado correto do Teorema Fundamental do Cálculo Integral?

- (a)  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ;
- (b) Se  $f$  é derivável, então  $\int_p^x f(t) dt = f'(x)$  para todo  $x$ ;
- (c) Se  $f$  é uma função derivável, então  $\int_a^b f(x) dx = 0$ ;
- (d) Se  $F(x) = \int_p^x f(t) dt$  é contínua, então  $f$  é derivável, e  $f'(x) = F(x)$  para todo  $x$ ;
- (e) Se  $f$  é uma função contínua, então  $F(x) = \int_p^x f(t) dt$  é uma função derivável, e  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$ .

**Questão 4.** Quais são as coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  do ponto  $P$  cujas coordenadas cartesianas são  $(-1, 1)$ ?

- (a)  $\rho = 2, \theta = \frac{3}{4}\pi$ ;
- (b)  $\rho = 2, \theta = \frac{1}{4}\pi$ ;
- (c)  $\rho = -\sqrt{2}, \theta = \frac{1}{4}\pi$ ;
- (d)  $\rho = \sqrt{2}, \theta = \frac{3}{4}\pi$ ;
- (e)  $\rho = -2, \theta = \frac{1}{4}\pi$ .

**Questão 5.** *Determine o conjunto de pontos em que a função  $f$  é diferenciável:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a)  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b)  $f$  é contínua, mas não é diferenciável;
- (c)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ ;
- (d)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ ;
- (e)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Questão 6.** *Calcule a seguinte integral definida:*

$$A = \int_0^{\ln(2)} x e^x dx.$$

- (a)  $A = \ln(4) - 1$ ;
- (b)  $A = 1$ ;
- (c)  $A = \ln 2$ ;
- (d)  $A = \ln(2) - 1$ ;
- (e)  $A = 2\ln(2)$ .

**Questão 7.** *Qual das seguintes afirmações é falsa?*

- (a) Se  $f$  é diferenciável em  $p \in \mathbb{R}^2$ , então  $f$  é contínua em  $p$ ;
- (b) Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivadas parciais em  $p \in \mathbb{R}^2$ , então  $\nabla f(p) = 0$ ;
- (c) Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  é aberto, então o complementar de  $A$  é fechado;
- (d) Se  $f$  é contínua em  $p$ , então  $f(q)$  é arbitrariamente próximo a  $f(p)$  para  $q$  suficientemente próximo a  $p$ ;
- (e) Se  $f$  admite derivadas parciais em  $p \in \mathbb{R}^2$  e  $\nabla f(p) = 0$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$ .

**Questão 8.** *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (a) Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivadas parciais em  $p \in \mathbb{R}^2$ , então  $f$  não é diferenciável em  $p$ ;
- (b) Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável em  $p \in \mathbb{R}^2$ , então  $f$  admite derivadas parciais em  $p$ ;
- (c) Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  admite derivadas parciais em  $p \in \mathbb{R}^2$ , então  $f$  é diferenciável em  $p$ ;
- (d) Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $p$ , então  $f$  é diferenciável em  $p$ ;
- (e) Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $p$ , então  $f$  não é diferenciável em  $p$ .

**Questão 9.** Calcule o limite  $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ .

- (a) O limite não existe;
- (b)  $L = +\infty$ ;
- (c)  $L = \frac{1}{2}$ ;
- (d)  $L = 0$ ;
- (e)  $L = 1$ .

**Questão 10.** Calcule a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}$  da função

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x^2 + y^2).$$

- (a)  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} \cos(x^2 + y^2) - e^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (d)  $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y \sin(x^2 + y^2)$ ;
- (e)  $\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{xy} \cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$ .

**Questão 11.** Seja  $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ . Calcule a derivada  $F'(x)$ .

- (a)  $F'(x) = 2xe^{x^2}$ ;
- (b)  $F'(x) = f(x) - f(0)$ ;
- (c)  $F'(x) = e^{x^2}$ ;
- (d)  $F$  é contínua, mas não é derivável;
- (e)  $F'(x) = \int_0^x te^{t^2} dt$ .

**Questão 12.** Calcule o volume  $V$  do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo  $x$  do gráfico da função  $f(x) = x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 1$

- (a)  $V = \frac{2}{5}$ ;
- (b)  $V = \frac{2}{3}\pi$ ;
- (c)  $V = \frac{2}{5}\pi$ ;
- (d)  $V = \frac{2}{3}$ ;
- (e)  $V = \frac{1}{5}\pi$ .

**Questão 13.** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de uma variável, ambas deriváveis; definimos  $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ . Qual é a derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial x}$ ?*

- (a)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g'(y)$ ;
- (b)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x) \cdot g'(y)$ ;
- (c)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y)$ ;
- (d)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$ ;
- (e)  $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) + g(y)$ .

**Questão 14.** *Um automóvel, partindo da posição  $S(0) = 1$  tem sua velocidade dada por  $V(t) = e^{-t} \sin 2t + 1$ . Determine a posição deste automóvel em  $t = 1$ .*

- (a)  $S(1) = \frac{7}{5} + \frac{1}{5e}(\cos 2 + 2 \sin 2)$ ;
- (b)  $S(1) = \frac{7}{5} + \frac{1}{5e}(2 \cos 2 + \sin 2)$ ;
- (c)  $S(1) = \frac{7}{5} + 5e(2 \cos 2 + \sin 2)$ ;
- (d)  $S(1) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5e}(2 \cos 2 + \sin 2)$ ;
- (e)  $S(1) = \frac{2}{5} + 5e(2 \cos 2 + \sin 2)$ .

**Questão 15.** *Qual é o domínio  $A \subset \mathbb{R}^2$  da função  $f(x, y) = \ln(xy + 1)$ ?*

- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$ ;
- (b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\}$ ;
- (c)  $A = \mathbb{R}^2$ ;
- (d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$ ;
- (e)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$ .

**Questão 16.** *Se  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $p \in A$ , quando é que  $p$  é um ponto interno de  $A$ ?*

- (a) Quando  $p$  não é um ponto externo de  $A$ ;
- (b) Quando existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \cap A \neq \emptyset$ ;
- (c) Quando para todo  $r > 0$  a bola  $B(p, r)$  está contida em  $A$ ;
- (d) Quando existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \subset A$ ;
- (e) Quando  $p$  não pertence ao complementar de  $A$ .

**Questão 17.** Calcule a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  da função:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 + \frac{x+y}{(x^2+y^2)^2}$ ;
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ;
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ ;
- (d)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$ ;
- (e)  $f$  não admite derivadas parciais em  $(0,0)$ .

**Questão 18.** Calcule a integral indefinida  $\int \sin x \cos^2 x \, dx$ .

- (a)  $-\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$ ;
- (b)  $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$ ;
- (c)  $\frac{1}{2} \sin^2 x \cos^3 x + C$ ;
- (d)  $\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$ ;
- (e)  $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$ .

**Questão 19.** Calcule a seguinte integral definida:

$$A = \int_0^\pi x \sin(x^2 + 1) \, dx.$$

- (a)  $A = \frac{1}{2} [\sin(1) - \sin(1 + \pi^2)]$ ;
- (b)  $A = 0$ ;
- (c)  $A = \frac{1}{2} [\cos(1) - \cos(1 + \pi^2)]$ ;
- (d)  $A = \cos(1) - \cos(1 + \pi^2)$ ;
- (e)  $A = \frac{1}{2}$ .

**Questão 20.** Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (1) Se  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $x F(x)$  é uma primitiva de  $F(x) + x f(x)$ .
  - (2)  $\int f(x) \cdot g(x) dx = \left( \int f(x) dx \right) \cdot \left( \int g(x) dx \right)$ .
  - (3) Se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ ,  $x > 0$ , então  $F(\ln(x))$  é uma primitiva de  $f(\ln(x))$ .
  - (4) Se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então para toda constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $F + c$  é uma primitiva de  $f$ .
  - (5) Se  $F$  é uma primitiva de  $f$ , então para toda constante  $c \in \mathbb{R}$ ,  $F$  é uma primitiva também de  $f + c$ .
- (a) As afirmações verdadeiras são a (2), a (3) e a (5). As demais são falsas;
  - (b) As afirmações verdadeiras são a (1), a (4) e a (5). As demais são falsas;
  - (c) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (4). As demais são falsas;
  - (d) As afirmações verdadeiras são a (4) e a (5). As demais são falsas;
  - (e) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (5). As demais são falsas.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II  
Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — **D**  
14 de Outubro de 2011

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

### Folha de Respostas

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota