MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

14 de Outubro de 2011

Prova 1 — $\boxed{\textbf{C}}$

Nome: ____

Número USP: ____________________________________

Assinatura: _____________________________________

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
- $\sin x$ é a função "seno de x"; $\ln x$ é a função "logaritmo natural de x".
- Para $p \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, $B(p, r)$ denota a bola aberta de centro p e raio r em $\mathbb{R}^2$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Calcule a derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *da função:*

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$;

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 + \dfrac{x+y}{(x^2+y^2)^2}$;

(c) f não admite derivadas parciais em $(0,0)$;

(d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$;

(e) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -1$.

Questão 2. *Qual é o domínio* $A \subset \mathbb{R}^2$ *da função* $f(x,y) = \ln(xy+1)$*?*

(a) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\big\}$;

(b) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\big\}$;

(c) $A = \mathbb{R}^2$;

(d) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\big\}$;

(e) $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\big\}$.

Questão 3. *Sejam* f *e* g *duas funções de uma variável, ambas deriváveis; definimos* $F(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. *Qual é a derivada parcial* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$*?*

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$;

(b) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f(x) \cdot g'(y)$;

(c) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g'(y)$;

(d) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) + g(y)$;

(e) $\dfrac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y)$.

Questão 4. *Calcule a seguinte integral definida:*

$$A = \int_0^{\pi} x \sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$$

(a) $A = \cos(1) - \cos\left(1+\pi^2\right)$;
(b) $A = 0$;
(c) $A = \frac{1}{2}$;
(d) $A = \frac{1}{2}\left[\sin(1) - \sin\left(1+\pi^2\right)\right]$;
(e) $A = \frac{1}{2}\left[\cos(1) - \cos\left(1+\pi^2\right)\right]$.

Questão 5. *Seja* $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$*. Calcule a derivada* $F'(x)$*.*

(a) $F'(x) = f(x) - f(0)$;
(b) F é contínua, mas não é derivável;
(c) $F'(x) = 2xe^{x^2}$;
(d) $F'(x) = \int_0^x te^{t^2}\,\mathrm{d}t$;
(e) $F'(x) = e^{x^2}$.

Questão 6. *Se* $C \subset \mathbb{R}^n$*, quando é que* C *é* fechado*?*

(a) Quando todo ponto de C é interno a C;
(b) Quando existe $p \in C$ que é interno a C;
(c) Quando todo ponto do complementar de C é interno ao complementar de C;
(d) Quando C não é aberto;
(e) Quando nenhum ponto de C é interno a C.

Questão 7. *Determine o conjunto de pontos em que a função* f *é diferenciável:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$;
(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;
(c) f é contínua, mas não é diferenciável;
(d) $\mathbb{R}^2$;
(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.

Questão 8. *Calcule a integral indefinida* $\displaystyle\int \sin x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

(a) $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$;
(b) $\frac{1}{6}\sin^2 x \cos^3 x + C$;
(c) $-\frac{1}{6}\sin^2 x \cos^3 x + C$;
(d) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$;
(e) $\frac{1}{2}\sin^2 x \cos^3 x + C$.

Questão 9. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(1) *Se* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma primitiva de* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *então* $x\,F(x)$ *é uma primitiva de* $F(x) + x\,f(x)$.
(2) $\displaystyle\int f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)$.
(3) *Se* $F(x)$ *é uma primitva da* $f(x)$, $x > 0$, *então* $F\big(\ln(x)\big)$ *é uma primitiva de* $f\big(\ln(x)\big)$
(4) *Se* F *é uma primitiva de* f, *antão para toda constante* $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ *é uma primitiva de* f.
(5) *Se* F *é uma primitiva de* f, *antão para toda constante* $c \in \mathbb{R}$, F *é uma primitiva também de* $f + c$.

(a) As afirmações verdadeiras são a (4) e a (5). As demais são falsas;
(b) As afirmações verdadeiras são a (2), a (3) e a (5). As demais são falsas;
(c) As afirmações verdadeiras são a (1), a (4) e a (5). As demais são falsas;
(d) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (4). As demais são falsas;
(e) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (5). As demais são falsas.

Questão 10. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em p;
(b) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em p, então f não é diferenciável em p;
(c) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \mathbb{R}^2$, então f admite derivadas parciais em p;
(d) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em p, então f é diferenciável em p;
(e) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f não é diferenciável em p.

Questão 11. *Calcule a derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *da função*

$$f(x,y) = e^{xy}\cos(x^2+y^2).$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{xy}\cos(x^2+y^2) - 2ye^{xy}\sin(x^2+y^2)$;
(b) $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}\cos(x^2+y^2) - 2ye^{xy}\sin(x^2+y^2)$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy}\cos(x^2+y^2) - e^{xy}\sin(x^2+y^2)$;
(d) $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y\sin(x^2+y^2)$;
(e) $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xye^{xy}\sin(x^2+y^2)$.

Questão 12. *Um automóvel, partindo da posição* $S(0) = 1$ *tem sua velocidade dada por* $V(t) = e^{-t}\sin 2t + 1$. *Determine a posição deste automóvel em* $t = 1$.

(a) $S(1) = \frac{7}{5} + \frac{1}{5e}(\cos 2 + 2\sin 2)$;
(b) $S(1) = \frac{7}{5} + \frac{1}{5e}(2\cos 2 + \sin 2)$;
(c) $S(1) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5e}(2\cos 2 + \sin 2)$;
(d) $S(1) = \frac{2}{5} + 5e(2\cos 2 + \sin 2)$;
(e) $S(1) = \frac{7}{5} + 5e(2\cos 2 + \sin 2)$.

Questão 13. *Calcule o limite:*

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + yx^2}{x^2+y^2}.$$

(a) $L = 0$;
(b) $L = (0,0)$;
(c) $L = +\infty$;
(d) O limite não existe;
(e) $L = 1$.

Questão 14. *Calcule o volume* V *do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo* x *do gráfico da função* $f(x) = x^2$, *com* $-1 \leq x \leq 1$

(a) $V = \frac{1}{5}\pi$;
(b) $V = \frac{2}{3}\pi$;
(c) $V = \frac{2}{3}$;
(d) $V = \frac{2}{5}$;
(e) $V = \frac{2}{5}\pi$.

Questão 15. *Calcule o limite* $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

(a) $L = 1$;
(b) $L = +\infty$;
(c) $L = 0$;
(d) O limite não existe;
(e) $L = \frac{1}{2}$.

Questão 16. *Quais são as coordenadas polares* (ρ, θ) *do ponto* P *cujas coordenadas cartesianas são* $(-1, 1)$*?*

(a) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$;
(b) $\rho = -2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
(c) $\rho = 2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
(d) $\rho = -\sqrt{2}$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
(e) $\rho = 2$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

Questão 17. *Se* $A \subset \mathbb{R}^2$ *e* $p \in A$*, quando é que* p *é um* ponto interno *de* A*?*

(a) Quando existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$;
(b) Quando para todo $r > 0$ a bola $B(p,r)$ está contida em A;
(c) Quando p não é um ponto externo de A;
(d) Quando existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset A$;
(e) Quando p não pertence ao complementar de A.

Questão 18. *Calcule a seguinte integral definida:*

$$A = \int_0^{\ln(2)} x\, e^x \,\mathrm{d}x.$$

(a) $A = \ln 2$;
(b) $A = \ln(4) - 1$;
(c) $A = 2\ln(2)$;
(d) $A = 1$;
(e) $A = \ln(2) - 1$.

Questão 19. *Qual das seguintes afirmações é falsa?*

(a) Se f é diferenciável em $p \in \mathbb{R}^2$, então f é contínua em p;

(b) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, então o complementar de A é fechado;

(c) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então $\nabla f(p) = 0$;

(d) Se f admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$ e $\nabla f(p) = 0$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$;

(e) Se f é contínua em p, então $f(q)$ é arbitrariamente próximo a $f(p)$ para q suficientemente próximo a p.

Questão 20. *Qual é o enunciado correto do Teorema Fundamental do Cálculo Integral?*

(a) Se $F(x) = \int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t$ é contínua, então f é derivável, e $f'(x) = F(x)$ para todo x;

(b) Se f é uma função derivável, então $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

(c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$;

(d) Se f é derivável, então $\int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t = f'(x)$ para todo x;

(e) Se f é uma função contínua, então $F(x) = \int_p^x f(t)\,\mathrm{d}t$ é uma função derivável, e $F'(x) = f(x)$ para todo x.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — $\boxed{\textbf{C}}$

14 de Outubro de 2011

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**