

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

14 de Outubro de 2011

Prova 1 — **A**

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função “seno de x ”; $\ln x$ é a função “logaritmo natural de x ”.
- Para $p \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, $B(p, r)$ denota a bola aberta de centro p e raio r em \mathbb{R}^2 .

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

Questão 1. Calcule o limite $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

- (a) $L = +\infty$;
- (b) $L = 0$;
- (c) $L = \frac{1}{2}$;
- (d) $L = 1$;
- (e) O limite não existe.

Questão 2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em p ;
- (b) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em p , então f é diferenciável em p ;
- (c) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em p , então f não é diferenciável em p ;
- (d) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então f não é diferenciável em p ;
- (e) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \mathbb{R}^2$, então f admite derivadas parciais em p .

Questão 3. Um automóvel, partindo da posição $S(0) = 1$ tem sua velocidade dada por $V(t) = e^{-t} \sin 2t + 1$. Determine a posição deste automóvel em $t = 1$.

- (a) $S(1) = \frac{7}{5} + \frac{1}{5e}(\cos 2 + 2 \sin 2)$;
- (b) $S(1) = \frac{7}{5} + 5e(2 \cos 2 + \sin 2)$;
- (c) $S(1) = \frac{2}{5} + 5e(2 \cos 2 + \sin 2)$;
- (d) $S(1) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5e}(2 \cos 2 + \sin 2)$;
- (e) $S(1) = \frac{7}{5} + \frac{1}{5e}(2 \cos 2 + \sin 2)$.

Questão 4. Calcule o limite:

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y + yx^2}{x^2 + y^2}.$$

- (a) $L = (0, 0)$;
- (b) $L = 0$;
- (c) $L = 1$;
- (d) $L = +\infty$;
- (e) O limite não existe.

Questão 5. Calcule a seguinte integral definida:

$$A = \int_0^{\ln(2)} x e^x dx.$$

- (a) $A = \ln(2) - 1$;
- (b) $A = 1$;
- (c) $A = 2\ln(2)$;
- (d) $A = \ln 2$;
- (e) $A = \ln(4) - 1$.

Questão 6. Se $C \subset \mathbb{R}^n$, quando é que C é fechado?

- (a) Quando existe $p \in C$ que é interno a C ;
- (b) Quando nenhum ponto de C é interno a C ;
- (c) Quando todo ponto do complementar de C é interno ao complementar de C ;
- (d) Quando C não é aberto;
- (e) Quando todo ponto de C é interno a C .

Questão 7. Calcule a integral indefinida $\int \sin x \cos^2 x dx$.

- (a) $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$;
- (b) $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$;
- (c) $-\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$;
- (d) $\frac{1}{2} \sin^2 x \cos^3 x + C$;
- (e) $\frac{1}{6} \sin^2 x \cos^3 x + C$.

Questão 8. Qual é o enunciado correto do Teorema Fundamental do Cálculo Integral?

- (a) Se f é derivável, então $\int_p^x f(t) dt = f'(x)$ para todo x ;
- (b) Se f é uma função contínua, então $F(x) = \int_p^x f(t) dt$ é uma função derivável, e $F'(x) = f(x)$ para todo x ;
- (c) Se f é uma função derivável, então $\int_a^b f(x) dx = 0$;
- (d) Se $F(x) = \int_p^x f(t) dt$ é contínua, então f é derivável, e $f'(x) = F(x)$ para todo x ;
- (e) $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Questão 9. Se $A \subset \mathbb{R}^2$ e $p \in A$, quando é que p é um ponto interno de A ?

- (a) Quando existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset A$;
- (b) Quando para todo $r > 0$ a bola $B(p, r)$ está contida em A ;
- (c) Quando existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \cap A \neq \emptyset$;
- (d) Quando p não pertence ao complementar de A ;
- (e) Quando p não é um ponto externo de A .

Questão 10. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (a) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, então o complementar de A é fechado;
- (b) Se f é contínua em p , então $f(q)$ é arbitrariamente próximo a $f(p)$ para q suficientemente próximo a p ;
- (c) Se f é diferenciável em $p \in \mathbb{R}^2$, então f é contínua em p ;
- (d) Se f admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$ e $\nabla f(p) = 0$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$;
- (e) Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas parciais em $p \in \mathbb{R}^2$, então $\nabla f(p) = 0$.

Questão 11. Calcule a seguinte integral definida:

$$A = \int_0^\pi x \sin(x^2 + 1) dx.$$

- (a) $A = 0$;
- (b) $A = \frac{1}{2} [\cos(1) - \cos(1 + \pi^2)]$;
- (c) $A = \frac{1}{2}$;
- (d) $A = \frac{1}{2} [\sin(1) - \sin(1 + \pi^2)]$;
- (e) $A = \cos(1) - \cos(1 + \pi^2)$.

Questão 12. Seja $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$. Calcule a derivada $F'(x)$.

- (a) $F'(x) = 2xe^{x^2}$;
- (b) $F'(x) = e^{x^2}$;
- (c) F é contínua, mas não é derivável;
- (d) $F'(x) = f(x) - f(0)$;
- (e) $F'(x) = \int_0^x te^{t^2} dt$.

Questão 13. Qual é o domínio $A \subset \mathbb{R}^2$ da função $f(x, y) = \ln(xy + 1)$?

- (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq -1\}$;
- (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$;
- (c) $A = \mathbb{R}^2$;
- (d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1\}$;
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < 1\}$.

Questão 14. Calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ da função

$$f(x, y) = e^{xy} \cos(x^2 + y^2).$$

- (a) $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy} \cos(x^2 + y^2) - e^{xy} \sin(x^2 + y^2)$;
- (b) $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - 2y \sin(x^2 + y^2)$;
- (c) $\frac{\partial f}{\partial y} = ye^{xy} \cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$;
- (d) $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$;
- (e) $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} \cos(x^2 + y^2) - 2ye^{xy} \sin(x^2 + y^2)$.

Questão 15. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (1) Se $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então $x F(x)$ é uma primitiva de $F(x) + x f(x)$.
 - (2) $\int f(x) \cdot g(x) dx = \left(\int f(x) dx \right) \cdot \left(\int g(x) dx \right)$.
 - (3) Se $F(x)$ é uma primitiva da $f(x)$, $x > 0$, então $F(\ln(x))$ é uma primitiva de $f(\ln(x))$.
 - (4) Se F é uma primitiva de f , então para toda constante $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ é uma primitiva de f .
 - (5) Se F é uma primitiva de f , então para toda constante $c \in \mathbb{R}$, F é uma primitiva também de $f + c$.
- (a) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (5). As demais são falsas;
 - (b) As afirmações verdadeiras são a (2), a (3) e a (5). As demais são falsas;
 - (c) As afirmações verdadeiras são a (1) e a (4). As demais são falsas;
 - (d) As afirmações verdadeiras são a (1), a (4) e a (5). As demais são falsas;
 - (e) As afirmações verdadeiras são a (4) e a (5). As demais são falsas.

Questão 16. *Determine o conjunto de pontos em que a função f é diferenciável:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- (b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$;
- (c) f é contínua, mas não é diferenciável;
- (d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
- (e) \mathbb{R}^2 .

Questão 17. *Calcule o volume V do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x do gráfico da função $f(x) = x^2$, com $-1 \leq x \leq 1$*

- (a) $V = \frac{2}{5}$;
- (b) $V = \frac{1}{5}\pi$;
- (c) $V = \frac{2}{3}$;
- (d) $V = \frac{2}{3}\pi$;
- (e) $V = \frac{2}{5}\pi$.

Questão 18. *Quais são as coordenadas polares (ρ, θ) do ponto P cujas coordenadas cartesianas são $(-1, 1)$?*

- (a) $\rho = -\sqrt{2}$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
- (b) $\rho = -2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$;
- (c) $\rho = 2$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$;
- (d) $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$;
- (e) $\rho = 2$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

Questão 19. *Calcule a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ da função:*

$$f(x, y) = \begin{cases} x + \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) f não admite derivadas parciais em $(0, 0)$;
- (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$;
- (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$;
- (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -1$;
- (e) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 + \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^2}$.

Questão 20. *Sejam f e g duas funções de uma variável, ambas deriváveis; definimos $F(x, y) = f(x) \cdot g(y)$. Qual é a derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial x}$?*

(a) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g'(y)$;

(b) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) + g(y)$;

(c) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y)$;

(d) $\frac{\partial F}{\partial x} = f(x) \cdot g'(y)$;

(e) $\frac{\partial F}{\partial x} = f'(x) \cdot g(y) + f(x) \cdot g'(y)$.

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II
Prof. Paolo Piccione

Prova 1 — **A**
14 de Outubro de 2011

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota