MAT 2351 – Cálculo para Funções de Várias Variáveis I

Prof. Paolo Piccione

Lista de Exercícios I

(1) *Calcule os seguintes limites:*

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(2) *Suponha $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua no retângulo $A = [a,b]\times[c,d]$. Prove que f é limitada.*

(3) *Como no Exercício (2), prove que f admite máximo e mínimo em A (Teorema de Weierstrass)*

(4) *Calcule as derivadas parciais das funções dadas:*

(a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x/y)$

(b) $f(x,y) = xy\,e^{xy}$

(c) $f(x,y) = x^y$

(d) $f(x,y) = x^2\ln(1+x^2+y^2)$

(e) $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

(f) $f(x,y) = \displaystyle\int_{0}^{x^2+y^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

(5) *Determine uma função $f(x,y)$ cujas derivadas parcias sejam:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2+1}.$$

(6) *Estude a continuidade e a diferenciabilidade da função dada no ponto $(0,0)$:*

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(7) *Sejam $f(t)$ e $g(x,y)$ funções diferenciáveis tais que $g\big(t, f(t)\big) = 0$ para todo t. Suponha $f(0) = 1$, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = 2$, e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 4$. Determine a equação da reta tangente à curva $\gamma(t) = \big(t, f(t)\big)$ no ponto $\gamma(0)$.*

(8) *Seja f uma função diferenciável definida na bola aberta de centro $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e raio 1. Prove que se $\nabla f(x,y) = 0$ para todo (x,y), então f é constante.*

(9) *Uma função $f(x,y)$ é dita* homogênea de grau *$\lambda \in \mathbb{R}$ se para todo (x,y) no domínio da f e para todo $t \in \mathbb{R}$, o ponto (tx,ty) fica no domínio da f, e $f(tx,ty) = t^\lambda f(x,y)$.* Dê exemplos de funções homogêneas de grau 0, 1, -1. *Prove que se f é homogênea de grau λ, então vale* a identidade de Euler*:*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda f(x,y). \tag{EU}$$

Reciprocamente, se f é uma função que satisfaz a (EU) e f é definita na bola aberta de raio 1 centrada em 0, então f é homogênea de grau λ.

(10) *Usando argumentos geométricos, obtenha a solução da equação a derivadas parciais abaixo:*

(a) $3\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$;

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$;

(c) $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$;

(11) *Mostre que cada uma das equações abaixo define pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ em termos de x e y:*

(a) $x^2y + \sin y = x$

(b) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$.

(12) *A imagem da curva $\gamma(t) = \big(2t, t^2, z(t)\big)$ está contida no gráfico da função $f(x,y)$. Sabe-se que $f(2,1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.*