MAT 2219

Cálculo III para Química

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

27 de novembro de 2015

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\sin x$ é a função *seno* de x, $\ln x$ é o *logaritmo natural* de x.
- Dado um campo vetorial $\vec{V}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ denota o *divergente* de $\vec{V}$, e $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ o *rotacional* de $\vec{V}$. Para uma função f (suficientemente diferenciável), $\vec{\nabla}f$ é o *gradiente* de f, e Δf é o *Laplaciano* de f, definido como $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f$, ou seja, o divergente do gradiente de f
- A integral de linha do campo $\vec{V}$ ao longo da curva γ é denotado com $\int_\gamma \vec{V}\cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$. A integral de superfície do campo $\vec{V}$ ao longo da superfície Σ é denotado com $\int_\Sigma \vec{V}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{B}}$

Questão 1. *Calcule o divergente* $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ *do campo*

$$\vec{V} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\vec{\imath} + \frac{y}{x^2+y^2+z^2}\vec{\jmath} + \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\vec{k}.$$

(a) $-\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

(b) 0;

(c) $-\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$;

(d) $\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$;

(e) $\dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

Questão 2. *Um objeto se move ao longo da hélice circular*

$$\gamma(t) = \cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath} + t\vec{k}$$

desde o ponto $(1, 0, 0)$ *até* $(1, 0, 2\pi)$. *Uma das forças que atuam sobre o objeto é dada por*

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2\,\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}.$$

Calcular o trabalho realizado por $\vec{F}$.

(a) $\frac{4}{3}\pi^2$;

(b) $\frac{8}{3}\pi^3$;

(c) 0;

(d) $\frac{8}{3}\pi^2$;

(e) $\frac{4}{3}\pi^3$.

Questão 3. *Calcule o rotacional* $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ *do campo* $\vec{V} = \dfrac{y}{z}\vec{\imath} + \dfrac{x}{z}\vec{\jmath} + \dfrac{x}{y}\vec{k}$.

(a) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{\imath} - (1/y + y/z^2)\vec{\jmath}$;

(b) $\frac{1}{x}\vec{\imath} + \frac{1}{y}\vec{\jmath} + \frac{1}{z}\vec{k}$;

(c) 0;

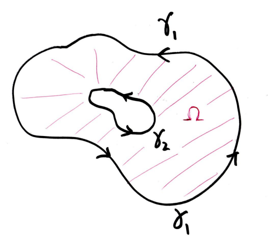
(d) $x(1/z^2 - 1/y^2)\vec{\imath} + (-1/y + y/z^2)\vec{\jmath}$;

(e) $-\frac{y}{z^2}\vec{\imath} - \frac{x}{z^2}\vec{\jmath} - \frac{x}{y^2}\vec{k}$.

Questão 4. *Calcule a integral de linha* $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$*, onde* $\vec{V} = (x-y)\,\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}$*, e* γ *é o segmento com ponto inicial* $(2,3)$ *e ponto final* $(1,2)$

(a) $-\frac{15}{6}$;
(b) $\frac{17}{6}$;
(c) $-\frac{17}{3}$;
(d) $-\frac{17}{6}$;
(e) $\frac{15}{6}$.

Questão 5. *Considere o domínio* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *limitado pelas curvas* γ_1 *e* γ_2*, como na figura abaixo.*



Considere as curvas γ_1 *e* γ_2 *com as orientações dadas na figura (as duas no sentido anti-horário). Quais das integrais de linhas abaixo fornece como resultado a área da região* Ω*?*

(a) $\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_2} x\,\mathrm{d}y$;
(b) $\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x$;
(c) $-\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x$;
(d) $\int_{\gamma_1} y\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x$;
(e) $\int_{\gamma_1} x\,\mathrm{d}y - \int_{\gamma_2} y\,\mathrm{d}x$.

Questão 6. *Seja* γ *curva no plano dada pelos lados do triângulo de vértices* $(-1,0)$*,* $(2,0)$ *e* $(1,1)$*, percorrida no sentido horário. Calcule a integral* $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$*, onde* $\vec{V}$ *é o campo* $(y + \tan^3 x)\vec{\imath} - (x + \cos^5 y)\vec{\jmath}$*.*
(Sugestão: use a fórmula de Green!)

(a) 3;
(b) $\frac{3}{2}$;
(c) 0;
(d) $-\frac{3}{2}$;
(e) -3.

Questão 7. *Seja V o campo vetorial no $\mathbb{R}^3$ dado pelo gradiente da função $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3$. Calcule a integral $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$, onde γ é a curva $\gamma(t) = (t, t^3, t^5)$, $t \in [-1, 1]$.*

(a) 2;
(b) -1;
(c) -2;
(d) 1;
(e) 0.

Questão 8. *Sejam $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções que admitem derivadas primeiras contínuas, e seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio compacto cuja fronteira é uma curva γ fechada, simples e regular por partes. Qual dos seguintes é o enunciado correto do Teorema de Green no plano?*

(a) Se γ é orientada no sentido horário, então
$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$
(b) Se γ é orientada no sentido horário, então
$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$
(c) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então
$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$
(d) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então
$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$$
(e) Se γ é orientada no sentido anti-horário, então
$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Questão 9. *Seja $\vec{V}$ um campo vetorial num domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cujas componentes são funções com derivadas primeiras contínuas em Ω. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

(A) *Se $\vec{V}$ é irrotacional, então $\vec{V}$ é conservativo.*
(B) *Se $\vec{V}$ é conservativo, então $\vec{V}$ é irrotacional.*
(C) *Se $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} = 0$ para toda curva fechada γ em Ω, então $\vec{V}$ é conservativo.*

(a) é verdadeira apenas a (B);
(b) é verdadeira apenas a (C);
(c) são verdadeira apenas a (B) e a (C);
(d) são verdadeira apenas a (A) e a (C);
(e) são verdadeira apenas a (A) e a (B).

Questão 10. *Calcule um potencial $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para o campo conservativo $\vec{V} = (x^2 + y)\vec{\imath} + (y^2 + x)\vec{\jmath}$.*

(a) $f = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$;
(b) $f = \frac{1}{3}x^3 + 2xy + \frac{1}{3}y^3$;
(c) $f = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$;
(d) $\vec{V}$ não é conservativo;
(e) $f = x^3 + xy + y^3$.

Questão 11. *Quais dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^2$ abaixo é simplesmente conexo?*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;
(b) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2,\ x > 0\}$;
(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
(e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

Questão 12. *Use o Teorema da Divergência e/ou o Teorema de Stokes para estabelecer quais das seguintes afirmações são verdadeiras.*

(A) $\iiint_B \Delta f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$ *para toda função f (que admite derivadas segundas contínuas) e todo domínio $B \subset \mathbb{R}^3$ compacto, com fronteira regular.*

(B) *Se $\Sigma = \partial B$ é uma superfície regular, fronteira do domínio compacto $B \subset \mathbb{R}^3$, e $\vec{V}$ é um campo em $\mathbb{R}^3$ que admite derivadas primeiras contínuas, então o fluxo $\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 0$.*

(C) *Se $\vec{V}$ é um campo irrotacional num domínio $B \subset \mathbb{R}^3$, e existe uma curva simples e fechada γ em B tal que $\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma} \neq 0$, então não existe nenhuma superfície Σ contida em B cujo bordo é γ.*

(a) Apenas (B) e (C) são verdadeiras;

(b) Apenas a (A) é verdadeira;

(c) Apenas a (B) é verdadeira;

(d) Apenas a (A) e a (C) são verdadeiras;

(e) As três afirmações são verdadeiras.

Questão 13. *Considere o campo*

$$\vec{V} = \left(x + \sin(y^2 + z^2)\right)\vec{\imath} + \left(y + \sin(x^2 + z^2)\right)\vec{\jmath} - \left(z + \sin(x^2 + y^2)\right)\vec{k},$$

e seja Σ a esfera de centro $(0,1,2)$ e raio 2, com a normal $\vec{n}$ que aponta para dentro *da esfera. Calcular o fluxo $\int_\Sigma \vec{V} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma$.*
(Sugestão: use o Teorema da Divergência.)

(a) 0;

(b) $-\frac{32}{3}\pi$;

(c) $-\frac{17}{3}\pi$;

(d) $\frac{32}{3}\pi$;

(e) $\frac{17}{3}\pi$.

Questão 14. *Identifique estes caracteres:* $\boxed{\boxed{\Sigma}}$ *e* $\boxed{\boxed{\gamma}}$.

(a) Σ é a letra grega "Sigma", em maiúsculo, e γ é a letra grega "delta", em minúsculo;

(b) Σ é a letra grega "sigma", em minúsculo, e γ é a letra grega "Gama", em maiúsculo;

(c) Σ é a letra grega "Delta", em maiúsculo, e γ é a letra grega "gama", em minúsculo;

(d) Σ é a letra grega "Sigma", em maiúsculo, e γ é a letra grega "gama", em minúsculo;

(e) Σ é o ideograma egípcio "Pharaó", e γ é o caráter chinês "chu".

Questão 15. *Quais dos conjuntos $A \subset \mathbb{R}^2$ abaixo é conexo?*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$;

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$;

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$;

(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\}$;

(e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

Questão 16. *Calcule a integral de superfície $\int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{V} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\Sigma$, onde $\vec{V} = xy\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + xy\vec{k}$, Σ é e superfície esférica centrada em $(1, -1, 2)$, de raio 2, com a normal $\vec{n}$ que aponta para fora.*
(Sugestão: pode usar o Teorema da Divergência, como também o Teorema de Stokes.)

(a) -8π;

(b) 4π;

(c) 8π;

(d) 0;

(e) -4π.

Questão 17. *Qual é a superfície Σ representada pelas equações paramétricas abaixo?*

$$\Sigma = \begin{cases} x = 2u + v - 1 \\ y = 3u - 4v + 2 \\ z = -u + 3v \end{cases} \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Um plano passante por $(-1, 3, 0)$, paralelo aos vetores $(2, 1, -1)$ e $(3, -4, 2)$;
(b) Um plano passante por $(-1, 2, 0)$, perpendicular aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(1, -4, 3)$;
(c) O gráfico do parabolóide $z = (2u + v - 1)(3u - 4v + 2)$ e passante por $(-1, 3, 0)$;
(d) Um plano passante por $(-1, 2, 0)$, paralelo aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(1, -4, 3)$;
(e) Uma esfera centrada em $(-1, 2, 0)$ e de raio $\sqrt{10}$.

Questão 18. *Considere o domiínio Ω como na figura da Questão* **??**. *Se $\vec{V}$ é um campo irrotacional em Ω, o que podemos afirmar sobre a integral de linha $\int_{\gamma_1} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}_1$?*

(a) é igual a 0;
(b) é igual a $-\int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}_2$;
(c) é igual à integral $\int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}_2$;
(d) é igual a $\frac{1}{2} \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}_2$;
(e) é igual a $2 \int_{\gamma_2} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}_2$.

Questão 19. *Usando o Teorema de Stokes, calcule $\int_{\gamma} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{\gamma}$, onde $\vec{V} = z\vec{\imath}$, e γ é o círculo no plano xz de centro $(0, 0, 0)$, raio 1, orientado no sentido anti-horário do plano xz.*

(a) π;
(b) 0;
(c) 2π;
(d) $-\pi$;
(e) -2π.

Questão 20. *Calcule o Laplaciano* Δf *da função*

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

(a) Δf é igual a -2 vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão **??**;

(b) Δf é igual a $\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão **??**;

(c) Δf é igual ao divergente do campo $\vec{V}$ da Questão **??**;

(d) Δf é igual a 2 vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão **??**;

(e) Δf é igual a $-\frac{1}{2}$ vezes o divergente do campo $\vec{V}$ da Questão **??**.

MAT 2219

Cálculo III para Química

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

27 de novembro de 2015

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\textbf{B}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota