MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
LISTA DE EXERCÍCIOS 5

SÉRIES DE POTÊNCIAS

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

Obs. a menos de menção contrária, as potências e o logaritmo se referem a seus ramos principais.

Exercício 1 (Séries clássicas). Determine as séries de potências centradas em 0 que correspondem às funções abaixo e determine seus respectivos raios de convergência R:

(A)
$$e^z$$
(B)
$$\cos z$$
(C)
$$\sin z$$
(D)
$$\frac{1}{1-z}$$
(E)
$$\log(1-z)$$
(F)
$$\frac{1}{1+z}$$
(G)
$$\log(1+z)$$

Exercício 2. Determine o raio de convergência R das séries de potências abaixo:

(A)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3\mathrm{i})^n}(z-1)^n$$

Data: 6 de outubro de 2019.

(B)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{11^{n+2\mathrm{i}}}{n!} z^n$$

(C)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2\mathrm{i}}}{2^n} (z-\pi)^n$$

(D)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(4+3\mathrm{i})^n} z^n$$

(E)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7n}{(5+\mathrm{i})^n} (z+2)^n$$

(F)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\log(n\mathrm{i})} z^n$$

(G)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{2^{n\mathrm{i}}} z^n$$

(H)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3\mathrm{i}}\, n} z^n$$

(I)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n\mathrm{i}}}{\mathrm{i}(2n)!} z^n$$

(J)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

(K)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\log n} z^n$$

(L)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n} z^n$$

Exercício 3. Qual é a função representada pela série de potências abaixo?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$$

Exercício 4. Como varia o raio de convergência R da série de potências abaixo conforme varia $\alpha \in [0, \infty[$?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^{\alpha+1}} z^n$$

Exercício 5. Mostre que as fórmulas abaixo valem no aberto respectivo onde cada série converge absolutamente:

(A)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$$

(B)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

(C)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z + z^2}{(1-z)^3}$$

(D)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z + 4z^2 + z^3}{(1-z)^4}$$

(E)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n = \frac{z + 11z^2 + 11z^3 + z^4}{(1-z)^5}$$

Exercício 6. Dado $\alpha \neq 0$, deduza a expressão de uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{\alpha - z}$$

num disco aberto centrado em 0.

Qual é o raio de convergência R dessa série?

Exercício 7. Considere a série

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(A) Determine o raio de convergência R de f.

(B) Mostre que
$$f'(z) = \frac{\alpha f(z)}{1+z}$$
(C) Mostre que
$$[(1+z)^{-\alpha} f(z)]' = 0$$
(D) Note que $f(0) = 1$. Considerando o ítem anterior, o que podemos concluir?
(E) Esse resultado vale para $\alpha \in \mathbb{C}$?

Lembrete. se as séries de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ têm raios de convergência $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$, respectivamente, então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ converge absolutamente na bola aberta $B_R(0)$, onde $R = \min\{R_1, R_2\}$ e
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right) z^n\end{aligned}$$
Note que isso não quer dizer que R é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Exercício 8. Utilizando a fórmula do produto entre séries...

(A) deduza que num aberto que contém 0,
$$\sec z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5}{4!}z^4 + \frac{61}{6!}z^6 + O(z^8)$$
(B) utilize o ítem anterior para deduzir que num aberto que contém 0,
$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 + O(z^7)$$
(C) determine a série de potências que corresponde à função abaixo num aberto contendo 0
$$\frac{1}{1+z+z^2}$$

REFERÊNCIAS

[1] Marcio G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
[2] Donald Sarason, *Complex function theory*, American Mathematical Society.
[3] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Email address: `piccione.p@gmail.com.br, gustavopramos@gmail.com`