MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

TOPOLOGIA DO PLANO COMPLEXO

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

Lembrete.

- Uma *bola aberta* é um conjunto da forma
$$B_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\},$$
onde $r > 0$. Nas aulas do curso, se usa também a notação $D(z, r)$, e bolas abertas em $\mathbb{C}$ são chamadas também *discos abertos*.
- Se $A \subset \mathbb{C}$, A é *aberto* quando dado $z \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset A$.
- Se $F \subset \mathbb{C}$, F é *fechado* quando $\mathbb{C} \setminus F$ é aberto.
- Se $ED \subset \mathbb{C}$, a *fronteira* de E é o conjunto

$$\partial E = \{z \in \mathbb{C} : \forall r > 0,\ B_r(z) \cap (\mathbb{C} \setminus E) \neq \emptyset, B_r(z) \cap E \neq \emptyset\}.$$

Notações.

- $\Re \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e $\Im \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ são as funções *parte real* e *parte imaginária*, respeitivamente.
- i é a unidade imaginária.

Exercício 1. Prove que os conjuntos abaixo são abertos:

(A) $|z| > 1$
(B) $\Re(z) > 0$
(C) $|z + z^2| < 1$

Exercício 2. Fixe $z_0 \in \mathbb{C}$. Esboce os conjuntos abaixo, identifique sua fronteira e classifique se eles são abertos, fechados. (ou simultaneamente aberto e fechado)

(A) $\Re(z) \geq \Re(z_0)$
(B) $\Im(z_0) > \Re(z)$

Data: 18 de agosto de 2019.

(C) $\Re(z^2) \geq 1$
(D) $\Im(zz_0) > 0$
(E) $|z - z_0| < |\bar{z} - z_0|$
(F) $|z - z_0| \leq |z - \bar{z_0}|$
(G) $1 < |z - \bar{z_0}| \leq 3$
(H) $\Im(z^2) \leq 1$

Exercício 3.

(A) Prove que a intersecção de um número finito de abertos $A_1, ..., A_n$ é aberto.
(B) Prove que a união de um número finito de fechados $F_1, ..., F_n$ é fechado.

Exercício 4.

(A) A intersecção arbitrária de conjuntos abertos precisa ser um conjunto aberto?
(B) A união arbitrária de conjuntos fechados precisa ser um conjunto fechado?

Exercício 5.

(A) Existe conjunto aberto A tal que $\partial A \subset A$?
(B) Prove que dado $A \subset \mathbb{C}$, ∂A é fechado.
(C) Existem conjuntos que são simultaneamente abertos e fechados?

Exercício 6. Parametrize a fronteira dos conjuntos abaixo:
(A) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ \Re(z) \geq 1/2\}$
(B) $B = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 1,\ \Re(z) \geq 0\}$
(C) $D = \{z \in \mathbb{C} : 1/3 \leq |z| \leq 1,\ \Re(z) \geq \Im(z) \geq 0\}$

Exercício 7. Calcule o limite das seguintes sequências em $\mathbb{C}$.
(A) $z_n = \mathrm{i}^{n!} + 2^{-n}$
(B) $z_n = \dfrac{\mathrm{i}n^3 + 1}{2n^3 + n^2}$
(C) $z_n = \dfrac{z^n}{n!}$

Lembrete. Um *domínio* é um conjunto $D \subset \mathbb{C}$ aberto tal que dados $z_1, z_2 \in D$, há curva suave por partes com imagem em D que liga z_1 a z_2.

Se $C \subset \mathbb{C}$, C é dito *limitado* quando há $R > 0$ tal que $C \subset B_R(0)$.

Exercício 8. Que conjuntos dos Exercícios 1 e 2 são domínios? Quais deles são limitados?

REFERÊNCIAS

[1] Marcio G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
[2] Donald Sarason, *Complex function theory*, AMS.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
E-mail address: piccione.p@gmail.com.br, gustavopramos@gmail.com