MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

Notações. O corpo dos número complexos é denotado por $\mathbb{C}$. A *unidade imaginária* é denotada por $\mathfrak{i}$. Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, a *parte real* e a *parte imaginária* de z são denotadas respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Assim, $z = \Re(z) + \mathfrak{i}\,\Im(z)$.

1. O SISTEMA DE NÚMEROS COMPLEXOS

Exercício 1 (Inverso de um número complexo)**.** *Seja* $z = x + \mathfrak{i}y \neq 0$ *um número complexo. Deduza que*

$$z^{-1} = \frac{x - \mathfrak{i}y}{x^2 + y^2}$$

Lembrete. Dado $z \in \mathbb{C}$, existe um único $\rho \in [0, \infty[$ e existe $\theta \in \mathbb{R}$ (que não é único) tais que

$$z = \rho(\cos\theta + \mathfrak{i}\sin\theta)$$

A forma acima é dita *forma polar* de z.

Denotamos $\arg z = \theta$. Ou seja, $\arg z$ é algum ângulo para o qual vale a identidade. (note que qualquer $\theta + 2\pi k$ com k inteiro serviria)

Caso $\theta \in](-\pi, \pi]$, denotamos $\mathrm{Arg}\ z = \theta$. (que é chamado *valor principal* de $\arg z$)

Exercício 2. *Dê exemplos em que vale:*

(A) $\mathrm{Arg}\ z^{-1} \neq -\mathrm{Arg}\ z$
(B) $\mathrm{Arg}\ (zw) \neq \mathrm{Arg}\ z + \mathrm{Arg}\ w$

Exercício 3. *Mostre que*

(A) $(-1 + \mathfrak{i})^7 = -8(1 + \mathfrak{i})$
(B) $(1 + \mathfrak{i}\sqrt{3})^{-10} = 2^{-11}(-1 + \mathfrak{i}\sqrt{3})$

Exercício 4. *Escreva na forma* $x + \mathfrak{i}y$ *com* x, y *reais:*

Data: 5 de agosto de 2019.

(A)
$$\frac{1}{(1+\mathfrak{i})^{12}}$$
(B)
$$\left(\frac{1+\mathfrak{i}}{1-\mathfrak{i}}\right)^{11}$$
(C)
$$(-1+\mathfrak{i}\sqrt{3})^{5}$$
(D)
$$\frac{25}{3+4i}$$

Exercício 5. *Calcule* $(2+\mathfrak{i})(3+\mathfrak{i})$ *e deduza que*
$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

Exercício 6. *Mostre que*
$$\sqrt{2}|z| \geq |\Re(z)| + |\Im(z)|$$

Exercício 7 (Raízes conjugadas)**.** *Se* $p(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ *é polinômio com coeficientes reais e* ζ *é raiz de* p*, mostre que* $\bar{\zeta}$ *também é raiz.*

2. Identidades e fórmulas

Exercício 8 (Fórmula de De Moivre)**.** (A) *Mostre que dados* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\theta \in \mathbb{R}$*,*
$$(\cos\theta + \mathfrak{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathfrak{i}\sin n\theta$$
Essa identidade é conhecida como fórmula de De Moivre*.*

(B) *Deduza as fórmulas abaixo para* $\theta \in \mathbb{R}$*,*
  (a) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
  (b) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
  (c) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$
  (d) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

(C) *Como ficariam fórmulas análogas para* $\sin 4\theta$ *e* $\cos 4\theta$*?*

Exercício 9 (Raiz n-ésima de número real)**.**

(A) *Determine as raízes de*
$$\omega^n = 1$$
(B) *Analogamente, determine as raízes de*
$$\zeta^n = -1$$

(C) *Deduza a fórmula geral para as raízes de*

$$z^n = x$$

onde $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 10 (Raiz n-ésima de número complexo)**.**

(A) *Dado* $\zeta \in \mathbb{C}$ *com* $|\zeta| = 1$, *determine as raízes de*

$$\omega^n = \zeta$$

(B) *Deduza a fórmula geral para as raízes de*

$$z^n = \xi$$

onde $\xi \in \mathbb{C}$.

Exercício 11. *Calcule:*

(A) *As raízes quadradas de* $1 - \mathfrak{i}\sqrt{3}$
(B) *As raízes cúbicas de* -27

Exercício 12.

(A) *Mostre que dado* $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 - z)(1 + z + ... + z^{n-1}) = 1 - z^n$$

(B) *Deduza que se* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\omega^n = 1$, *então vale uma das seguintes:*
 (a) $\omega = 1$
 (b) $1 + \omega + ... + \omega^{n-1} = 0$

Exercício 13. (A) *Primeiro, prove que dado* $\theta \in \mathbb{R}$,

(a)

$$\cos\theta + \mathfrak{i}\sin\theta + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathfrak{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

(b)

$$\cos\theta + \mathfrak{i}\sin\theta - 1 = 2\mathfrak{i}\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathfrak{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

(B) *Agora, deduza que*

(a)

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

(b)

$$\sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Dica. *no segundo ítem, deduza as duas fórmulas de uma mesma conta.*

Exercício 14 (Fórmula de Bháskara)**.** *Mostre que as soluções de*

$$az^2 + bz + c = 0$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ são dadas pela fórmula usual

$$z = \frac{-b \pm \xi}{2a}$$

onde $\xi^2 = b^2 - 4ac$

3. $\mathbb{C}$ COMO ESPAÇO MÉTRICO

Exercício 15. *Mostre que dados $n \in \mathbb{N}$ e $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$,*

$$|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|$$

Exercício 16.

(A) *Mostre que*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$$

(B) *Quando vale a igualdade?*

(C) *Deduza que se $z_2 \neq -z_3$, então*

$$\left|\frac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$$

4. GEOMETRIA NO PLANO COMPLEXO

O leitor interessado pode consultar [2] para encontrar mais exercícios relacionados a geometria plana com números complexos.

Exercício 17 (Produto interno)**.** *Considere os números complexos $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ e $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$.*

(A) *Mostre que $\Re(z_1\bar{z}_2) = \langle(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle$. (produto interno de $\mathbb{R}^2$)*

(B) *Deduza que se interpretamos z_1 e z_2 em $\mathbb{C}$ como os vetores $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, então eles são ortogonais se, e só se, $z_1\bar{z}_2$ é imaginário puro.*

Exercício 18. *Esboce e identifique os seguintes conjuntos:*

(A) $|z| = |z - 2|$

(B) $|z| = |\bar{z} - 1|$

(C) $a|z| = |z - 1|$, *onde* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

(D) $\Re(z) = \Im(z - 1)$

(E) $\Im(z-1) = |z+1|$
(F) $|\bar{z}| = |z-1|$

Exercício 19 (Triângulo equilátero)**.** *Prove que* z_1, z_2, z_3 *são vértices de um triângulo equilátero se, e somente se,*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$$

Exercício 20. *Sejam* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *distintos com* $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1.$ *Prove que*

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = 2 \arg \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Como interpretamos esse resultado geometricamente?

Dica. $\arg a = 2 \arg b$ *se, e só se,* $\bar{a}b^2$ *é número real não-negativo.*

Referências

[1] Marcio G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.

[2] Donald Sarason, *Complex function theory*, AMS.

Universidade de São Paulo, Departamento de Matemática
E-mail address: piccione.p@gmail.com.br,