Instituto de Matemática e Estatística

MAT0147 — CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II PARA ECONOMIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

PROFESSOR: PAOLO PICCIONE
MONITOR: LEANDRO AUGUSTO LICHTENFELZ

Exercício 1: Prove que cada uma das funções dadas é diferenciável em todo ponto de seu domínio.

(1) $f(x,y) = x + y^2$
(2) $f(x,y) = 2xy$
(3) $f(x,y) = \ln(xy)$
(4) $f(x,y) = \cos(x) + y$
(5) $f(x,y) = x^2 y$

Exercício 2: Determine, justificando, quais das funções abaixo são diferenciáveis em $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\mathrm{sen}(\dfrac{1}{x^2+y^2}), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Date: 17 de Setembro de 2010.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)}, & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 0, & \text{se } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Exercício 3: Para cada função abaixo, determine a equação do plano tangente e o vetor normal a ele, no ponto p correspondente.

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ \ p = (0,1,f(0,1))$.
(2) $f(x,y) = sen(x-y),\ \ p = (\pi,0,f(\pi,0))$.
(3) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2},\ \ p = (2,2,f(2,2))$.
(4) $f(x,y) = arctg(x+y),\ \ p = (0,1,f(0,1))$.
(5) $f(x,y) = (x-y)^2,\ \ p = (0,0,f(0,0))$.
(6) $f(x,y) = (x-y)^2,\ \ p = (1,1,f(1,1))$.

Exercício 4: Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pela expressão $f(x,y) = x\phi(x^2-y^2)$. Mostre que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a,a,f(a,a))$ passa pela origem.

Exercício 5: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável num ponto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Defina $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $S(x,y) = a(x-x_0) + b(y-y_0) + c$. Suponha que a seguinte condição é satisfeita:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f(x,y) - S(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \right) = 0.$$

Prove que $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ e $c = f(x_0,y_0)$. Este resultado mostra que quando f é diferenciável em (x_0,y_0), só existe um plano passando por este ponto com a propriedade de que a diferença entre a função e o plano tende a zero mais rapidamente que a norma $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|$.

Exercício 6: Seja Π o plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ no ponto $(a,b,f(a,b))$. Suponha que Π também é tangente ao gráfico de $g(x,y) = -x^2 - y^2$ (em outro ponto). Mostre que, neste caso, $a^2 + b^2 = 1$.

Exercício 7: Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2 < 1\}$, dada por $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Determine a equação do plano tangente em cada ponto de D. Verifique que o vetor normal em cada ponto $(a,b) \in D$ tem a mesma direção do vetor $(a,b,f(a,b))$. Interprete geometricamente.

Exercício 8: Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função da forma $f(x,y) = x\phi(\frac{x}{y})$, onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, mostre que todos os planos tangentes ao gráfico de f passam pela origem.