

MAT 147 — Turma 2010221
Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 3
1 de Dezembro de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- Lembre-se que a média final no curso será calculada usando a seguinte fórmula:

$$N_{\text{final}} = \max \left\{ \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3}, \frac{N_1 + N_3}{2}, \frac{N_2 + N_3}{2} \right\}.$$

- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Um *ponto crítico* da função $f(x, y)$ é um ponto (x_0, y_0) no domínio da f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

C

Questão 1. Qual das seguintes afirmações descreve corretamente o método dos multiplicadores de Lagrange?

- (a) A função $f(x, y)$ admite máximo e mínimo no conjunto $g(x, y) = 0$ quando $\nabla f = \lambda \nabla g$;
- (b) Se $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ para todo (x, y) tal que $g(x, y) = 0$, então (x, y) é um candidato a ser extremo local da f com vínculo $g(x, y) = 0$;
- (c) Se (x_0, y_0) é um extremo local da função $f(x, y)$ restrita ao vínculo $g(x, y) = 0$, sendo f e g funções diferenciáveis, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é paralelo a $\nabla g(x_0, y_0)$.;
- (d) Se (x_0, y_0) é um extremo local da função $f(x, y)$ restrita ao vínculo $g(x, y) = 0$, sendo f e g funções diferenciáveis, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é perpendicular a $\nabla g(x_0, y_0)$.;
- (e) Se $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$ quando $g(x, y) = 0$, então f admite máximos e mínimos locais condicionados a $g(x, y) = 0$.

Questão 2. Calcule o limite $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$.

- (a) $L = -\infty$;
- (b) $L = 3$;
- (c) $L = 0$;
- (d) o limite não existe;
- (e) $L = +\infty$.

Questão 3. Calcule o limite $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$.

- (a) $L = -\frac{1}{6}$;
- (b) $L = \frac{1}{2}$;
- (c) $L = -\infty$;
- (d) $L = +\infty$;
- (e) $L = 0$.

Questão 4. Para quais valores *negativos* de x o vetor $\vec{v} = (-6, -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2)$ é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (-1, 2)$ e tem comprimento $3\sqrt{5}$?

- (a) $x = -4$;
- (b) $x = -2$;
- (c) $x = -\sqrt{5}$;
- (d) $x = -1$;
- (e) $x = -3$.

Questão 5. Qual dos conjuntos abaixo é conexo?

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ou } x < 0\}$;
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 3\}$;
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \neq 0\}$;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

Questão 6. Estude a natureza dos pontos críticos da função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x - 4y + 1$.

- (a) $(1, -1)$ é um ponto de máximo local;
- (b) $(-1, 1)$ é um ponto de sela;
- (c) $(1, -1)$ é um ponto de mínimo local;
- (d) $(-1, 1)$ é um ponto de mínimo local;
- (e) $(-1, 1)$ é um ponto de máximo local.

Questão 7. Considere a função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 1$ restrita ao conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$. É correto afirmar que:

- (a) f possui mínimo e máximo globais, pois X é compacto;
- (b) nenhuma das alternativas;
- (c) f possui apenas um máximo global;
- (d) f não possui máximos nem mínimos globais, pois X não é compacto;
- (e) f possui apenas um mínimo global.

Questão 8. Em qual das direções abaixo a função $f(x, y) = e^x - e^y$ **de-**
crece mais rapidamente, a partir do ponto $(0, 0)$?

- (a) na direção de $v = (1, -1)$;
- (b) na direção de $v = (0, 1)$;
- (c) na direção de $v = (1, 0)$;
- (d) na direção de $v = (1, 1)$;
- (e) na direção de $v = (-1, 1)$.

Questão 9. Se $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

então é sempre verdade que:

- (a) Se f tiver um máximo global na circunferência de raio 1, então f tem pelo menos um ponto crítico em B ;
- (b) Se f não tiver pontos críticos em B , então f atinge um máximo global na circunferência de raio 1;
- (c) Se f tiver um máximo global em B , então f tem pelo menos um ponto crítico em B ;
- (d) Se f tiver um máximo local em B , então f tem pelo menos um ponto crítico em B ;
- (e) Se f não tiver pontos críticos em B , então f não tem máximos locais em B .

Questão 10. Sejam x, y e z números positivos, com produto $xyz = 1$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O valor mínimo da soma $x + y + z$ é 3;
- (b) A soma $x + y + z$ não tem nem máximo nem mínimo;
- (c) A soma $x + y + z$ é menor ou igual a 3;
- (d) O valor máximo da soma $x + y + z$ é 3;
- (e) A soma dos inversos $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ é menor ou igual a $x + y + z$.

Questão 11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$. Se restringirmos f ao conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, pode-se afirmar corretamente que:

- (a) f tem dois mínimos locais;
- (b) f tem um máximo e um mínimo locais;
- (c) f tem um máximo global e não tem mínimo global;
- (d) f tem dois máximos locais;
- (e) f tem um mínimo global e não tem máximo global.

Questão 12. Sejam $f(x, y, z) = x + 3y^4$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Se restringirmos f ao conjunto dos pontos onde $g(x, y, z) = 0$, então seu ponto de máximo global está:

- (a) no plano $4x + z = 0$;
- (b) no plano $x = 0$;
- (c) no plano $z = 0$;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e) no plano $x + z = 0$.

Questão 13. Considere a função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela expressão $f(x, y) = \cos(x - y)$, onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \pi\}$. O conjunto de todos os pontos que são mínimos globais para f em A é:

- (a) $\{(x, y) \in A : x + y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x + y = -\pi\}$;
- (b) $\{(x, y) \in A : x - y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = -\pi\}$;
- (c) $\{(x, y) \in A : x + y = -\pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = \pi\}$;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e) $\{(x, y) \in A : x + y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = \pi\}$.

Questão 14. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, t^3)$. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$, então a derivada da composta $g(t) = f(\gamma(t))$ em $t = 0$ é:

- (a) 0;
- (b) 3;
- (c) 1;
- (d) -1;
- (e) 2.

Questão 15. De todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que se encontram sobre a curva $xy = 1$, qual é o mais próximo da origem?

- (a) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$;
- (b) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$;
- (c) $(1, 1)$;
- (d) $(2, \frac{1}{2})$;
- (e) $(1, 0)$.

Questão 16. Determine o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = 3 \cos(x + y) - 2 \sin(x - y)$$

no ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}))$.

- (a) $z = -5x - y + \frac{3}{2}\pi$;
- (b) $z = x + y - \pi$;
- (c) $z - \frac{\pi}{2} = -5x - y$;
- (d) $z = 5x + y - \frac{3}{2}\pi$;
- (e) $z = 2x - \frac{\pi}{2} + 3y$.

Questão 17. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(u, v) = (uv^2, \cos(uv))$. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a expressão correta para a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial u}$ da composta $g = f \circ \phi$ é:

- (a) $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$;
- (b) $v^2 \frac{\partial f}{\partial y} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial x}$;
- (c) $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$;
- (d) $2vu \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$;
- (e) $v \frac{\partial f}{\partial x} - v \operatorname{cos}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$.

Questão 18. Qual é o enunciado correto do *Teorema de Weierstrass*?

- (a) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é limitado, então E é fechado;
- (b) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em E , então f admite máximo e mínimo em E ;
- (c) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto, e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo em E ;
- (d) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em A , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em A ;
- (e) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é fechado, então E é limitado.

Questão 19. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(x, y) = (1, 1)$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$. Se restringirmos f ao conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, qual das afirmações abaixo é necessariamente verdadeira?

- (a) f terá um máximo global e um mínimo global;
- (b) f não terá máximo nem mínimo global, pois seu gradiente nunca zera;
- (c) f terá um mínimo global, mas não um máximo global;
- (d) f não terá máximo nem mínimo global, pois X não é compacto;
- (e) f terá um máximo global, mas não um mínimo global.

Questão 20. Qual das alternativas abaixo corresponde ao máximo da função $f(x, y) = xy$ restrita ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 10\}$?

- (a) 25;
- (b) 0;
- (c) 100;
- (d) 10;
- (e) 50.

MAT 147 — Turma 2010221

Cálculo diferencial e integral II para Economia

Prof. Paolo Piccione

Prova 3

1 de Dezembro de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas C

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota