MAT 147 — Turma 2010221

Cálculo diferencial e integral II para Economia

Prof. Paolo Piccione

Prova 3

1 de Dezembro de 2010

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- Lembre-se que a média final no curso será calculada usando a seguinte fórmula:

$$N_{\text{final}} = \max\left\{\frac{N_1 + N_2 + N_3}{3}, \frac{N_1 + N_3}{2}, \frac{N_2 + N_3}{2}\right\}.$$

- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
- Um *ponto crítico* da função $f(x, y)$ é um ponto (x_0, y_0) no domínio da f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{B}}$

Questão 1. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, t^3)$.
Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(1,0) = (2,1)$, então a derivada da composta $g(t) = f(\gamma(t))$ em $t = 0$ é:

(a) 3;
(b) 1;
(c) 2;
(d) -1;
(e) 0.

Questão 2. Para quais valores *negativos* de x o vetor $\vec{v} = (-6, -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2)$ é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (-1, 2)$ e tem comprimento $3\sqrt{5}$?

(a) $x = -3$;
(b) $x = -4$;
(c) $x = -2$;
(d) $x = -1$;
(e) $x = -\sqrt{5}$.

Questão 3. Determine o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = 3\cos(x + y) - 2\sin(x - y)$$

no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\right)$.

(a) $z = -5x - y + \frac{3}{2}\pi$;
(b) $z = 2x - \frac{\pi}{2} + 3y$;
(c) $z = x + y - \pi$;
(d) $z - \frac{\pi}{2} = -5x - y$;
(e) $z = 5x + y - \frac{3}{2}\pi$.

Questão 4. Sejam $f(x, y, z) = x + 3y^4$ e $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Se restringirmos f ao conjunto dos pontos onde $g(x, y, z) = 0$, então seu ponto de máximo global está:

(a) no plano $x = 0$;
(b) no plano $x + z = 0$;
(c) no plano $4x + z = 0$;
(d) no plano $z = 0$;
(e) nenhuma das alternativas.

Questão 5. Qual das seguintes afirmações descreve corretamente o método dos multiplicadores de Lagrange?

(a) Se $\nabla f(x,y) = \lambda\,\nabla g(x,y)$ para todo (x,y) tal que $g(x,y) = 0$, então (x,y) é um candidato a ser estremo local da f com vínculo $g(x,y) = 0$;

(b) Se $\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda\frac{\partial g}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda\frac{\partial g}{\partial y}$ quando $g(x,y) = 0$, então f admite máximos e mínimos locais condicionados a $g(x,y) = 0$;

(c) A função $f(x,y)$ admite máximo e mínimo no conjunto $g(x,y) = 0$ quando $\nabla f = \lambda\nabla g$;

(d) Se (x_0, y_0) é um extremo local da função $f(x,y)$ restrita ao vínculo $g(x,y) = 0$, sendo f e g funções diferenciáveis, então $\nabla f(x_0,y_0)$ é perpendicular a $\nabla g(x_0,y_0)$.;

(e) Se (x_0, y_0) é um extremo local da função $f(x,y)$ restrita ao vínculo $g(x,y) = 0$, sendo f e g funções diferenciáveis, então $\nabla f(x_0,y_0)$ é paralelo a $\nabla g(x_0,y_0)$..

Questão 6. Calcule o limite $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$.

(a) $L = \frac{1}{2}$;

(b) $L = -\frac{1}{6}$;

(c) $L = 0$;

(d) $L = -\infty$;

(e) $L = +\infty$.

Questão 7. Calcule o limite $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$.

(a) $L = +\infty$;

(b) $L = -\infty$;

(c) o limite não existe;

(d) $L = 0$;

(e) $L = 3$.

Questão 8. Se $f : B \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, onde

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

então é sempre verdade que:

(a) Se f não tiver pontos críticos em B, então f atinge um máximo global na circunferência de raio 1;
(b) Se f tiver um máximo global na circunferência de raio 1, então f tem pelo menos um ponto crítico em B;
(c) Se f tiver um máximo local em B, então f tem pelo menos um ponto crítico em B;
(d) Se f não tiver pontos críticos em B, então f não tem máximos locais em B;
(e) Se f tiver um máximo global em B, então f tem pelo menos um ponto crítico em B.

Questão 9. Qual dos conjuntos abaixo é conexo?

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \neq 0\}$;
(b) nenhuma das alternativas;
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 3\}$;
(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ou } x < 0\}$;
(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

Questão 10. Qual é o enunciado correto do *Teorema de Weierstrass*?

(a) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}$ em E, então f admite máximo e mínimo em E;
(b) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em A, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}$ em A;
(c) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é limitado, então E é fechado;
(d) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto, e $f : E \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo em E;
(e) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é fechado, então E é limitado.

Questão 11. Estude a natureza dos pontos críticos da função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x - 4y + 1$.

(a) $(-1, 1)$ é um ponto de máximo local;
(b) $(1, -1)$ é um ponto de máximo local;
(c) $(1, -1)$ é um ponto de mínimo local;
(d) $(-1, 1)$ é um ponto de mínimo local;
(e) $(-1, 1)$ é um ponto de sela.

Questão 12. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(u, v) = (uv^2, \cos(uv))$. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a expressão correta para a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial u}$ da composta $g = f \circ \phi$ é:

(a) $v^2 \frac{\partial f}{\partial y} - v\mathrm{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial x}$;
(b) $v\frac{\partial f}{\partial x} - v\cos(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$;
(c) $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - u\mathrm{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$;
(d) $2vu\frac{\partial f}{\partial x} - u\mathrm{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$;
(e) $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - v\mathrm{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$.

Questão 13. Considere a função $f : A \to \mathbb{R}$, dada pela expressão $f(x, y) = \cos(x - y)$, onde $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq \pi\big\}$. O conjunto de todos os pontos que são mínimos globais para f em A é:

(a) $\{(x, y) \in A : x - y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = -\pi\}$;
(b) $\{(x, y) \in A : x + y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = \pi\}$;
(c) $\{(x, y) \in A : x + y = \pi\} \cup \{(x, y) \in A : x + y = -\pi\}$;
(d) nenhuma das alternativas;
(e) $\{(x, y) \in A : x + y = -\pi\} \cup \{(x, y) \in A : x - y = \pi\}$.

Questão 14. Sejam x, y e z números positivos, com produto $xyz = 1$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A soma $x + y + z$ não tem nem máximo nem mínimo;
(b) A soma $x + y + z$ é menor ou igual a 3;
(c) O valor máximo da soma $x + y + z$ é 3;
(d) O valor mínimo da soma $x + y + z$ é 3;
(e) A soma dos inversos $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ é menor ou igual a $x + y + z$.

Questão 15. Considere a função $f(x, y) = x^4 + y^4 + 1$ restrita ao conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$. É correto afirmar que:

(a) f possui apenas um mínimo global;
(b) f possui apenas um máximo global;
(c) f não possui máximos nem mínimos globais, pois X não é compacto;
(d) f possui mínimo e máximo globais, pois X é compacto;
(e) nenhuma das alternativas.

Questão 16. Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(x, y) = (1, 1)$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$. Se restringirmos f ao conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, qual das afirmações abaixo é necessariamente verdadeira?

(a) f terá um mínimo global, mas não um máximo global;
(b) f não terá máximo nem mínimo global, pois X não é compacto;
(c) f terá um máximo global e um mínimo global;
(d) f terá um máximo global, mas não um mínimo global;
(e) f não terá máximo nem mínimo global, pois seu gradiente nunca zera.

Questão 17. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = y$. Se restringirmos f ao conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, pode-se afirmar corretamente que:

(a) f tem um mínimo global e não tem máximo global;
(b) f tem dois máximos locais;
(c) f tem dois mínimos locais;
(d) f tem um máximo e um mínimo locais;
(e) f tem um máximo global e não tem mínimo global.

Questão 18. Em qual das direções abaixo a função $f(x, y) = e^x - e^y$ **decresce** mais rapidamente, a partir do ponto $(0, 0)$?

(a) na direção de $v = (1, 1)$;
(b) na direção de $v = (0, 1)$;
(c) na direção de $v = (1, -1)$;
(d) na direção de $v = (1, 0)$;
(e) na direção de $v = (-1, 1)$.

Questão 19. De todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que se encontram sobre a curva $xy = 1$, qual é o mais próximo da origem?

(a) $(2, \frac{1}{2})$;

(b) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$;

(c) $(1, 1)$;

(d) $(1, 0)$;

(e) $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3})$.

Questão 20. Qual das alternativas abaixo corresponde ao máximo da função $f(x, y) = xy$ restrita ao conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 10\}$?

(a) 50;

(b) 0;

(c) 10;

(d) 100;

(e) 25.

MAT 147 — Turma 2010221

Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 3
1 de Dezembro de 2010

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\text{B}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**