

MAT 147 — Turma 2010221
Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
10 de Novembro de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, e \mathbb{R}^2 é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Um *ponto crítico* da função $f(x, y)$ é um ponto (x_0, y_0) no domínio da f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- A distância de um ponto $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a um plano Π que não contém p é o menor valor possível de $\|(a, b, c) - (x, y, z)\|$, com (x, y, z) pertencente ao plano Π .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

D

Questão 1. Determine uma função diferenciável $f(x, y)$ cujas derivadas parciais sejam $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$.

- (a) Uma tal função f não existe;
- (b) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy^3 - yx^3$;
- (c) Uma tal f existe, mas não é nenhuma das funções dadas;
- (d) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + xy^3 - yx^3$;
- (e) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy^3 + yx^3$.

Questão 2. Em qual conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ a função $f(x, y) = e^{xy}$ admite máximo e mínimo absoluto?

- (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq xy \leq 4\}$;
- (b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2\}$;
- (c) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 - y^2 \leq 4\}$;
- (d) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 4\}$;
- (e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Questão 3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ conexo é aberto;
- (b) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ conexo é convexo;
- (c) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ conexo é fechado;
- (d) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ convexo é conexo;
- (e) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ convexo é aberto.

Questão 4. Para a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$:

- (a) $(1, 2)$ é um ponto de sela;
- (b) $(2, 1)$ é um ponto de sela;
- (c) ambos $(1, 2)$ e $(2, 1)$ são pontos de sela;
- (d) $(2, 1)$ é um ponto de mínimo local;
- (e) $(1, 2)$ é um ponto de máximo local.

Questão 5. Estude a natureza dos pontos críticos da função $f(x, y) = xy + y^4 + y^2 - 6y - 5x + 1$.

- (a) $(5, -504)$ é um ponto de máximo local;
- (b) $(-504, 5)$ é um ponto de sela;
- (c) $(-504, 5)$ é um ponto de mínimo local;
- (d) $(5, -504)$ é um ponto de mínimo local;
- (e) $(5, -504)$ é um ponto de sela.

Questão 6. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas de todas as ordens. Defina $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \phi(x) + y^2$. Se $\phi'(0) = 0$, qual das afirmações abaixo é (necessariamente) verdadeira?

- (a) $(0, 0)$ é ponto crítico de f , e é máximo local se $\phi''(0) < 0$;
- (b) $(0, 0)$ é ponto crítico de f somente se $\phi''(0) = 0$;
- (c) $(0, 0)$ é ponto crítico de f , e é mínimo local se $\phi''(0) < 0$;
- (d) $(0, 0)$ é ponto crítico de f , e é mínimo local se $\phi''(0) > 0$;
- (e) $(0, 0)$ é ponto crítico de f , e é máximo local se $\phi''(0) > 0$.

Questão 7. Qual é o enunciado correto do *Teorema de Schwarz*?

- (a) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, então f tem todas as derivadas segundas contínuas em A ;
- (b) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em E , então f admite máximo e mínimo em E ;
- (c) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em A , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em A ;
- (d) Se f é diferenciável num aberto A , então $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ em A ;
- (e) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo em E .

Questão 8. Se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável da forma $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x, y) = xy + 1$, então a expressão correta para a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial u}$ da composta $g = f \circ T$ é:

- (a) $x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial y}{\partial u}$;
- (b) $y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u}$;
- (c) $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} + 1$;
- (d) $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}$;
- (e) $y \frac{\partial x}{\partial u} + x \frac{\partial y}{\partial u} + 1$.

Questão 9. Qual é o enunciado correto do *Teorema de Weierstrass*?

- (a) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é limitado, então E é fechado;
- (b) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em E , então f admite máximo e mínimo em E ;
- (c) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em A , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em A ;
- (d) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto, e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo em E ;
- (e) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é fechado, então E é limitado.

Questão 10. Para qual das equações abaixo é possível garantir, através do Teorema da função implícita, que existe um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo o ponto p dado e uma função diferenciável $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$ de maneira que as soluções da equação em U são exatamente o gráfico de ϕ ?

- (a) $e^{x^2} - e^{y^2} = y^2$, $p = (0, 0)$;
- (b) nenhuma das alternativas;
- (c) $\cos(y^2) - x \cos(y) = 0$, $p = (1, 0)$;
- (d) $e^x + y^2 + y \sin(x) = 1$, $p = (0, 0)$;
- (e) $x \cos(xy) = y$, $p = (0, 0)$.

Questão 11. Qual dos conjuntos abaixo é conexo?

- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, y \neq 0\}$;
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ou } x < 0\}$;
- (c) nenhuma das alternativas;
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$;
- (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 3\}$.

Questão 12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuja expressão é $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$. A respeito de seus pontos críticos, pode-se afirmar corretamente que:

- (a) todos os pontos críticos de f são máximos ou mínimos locais;
- (b) todos os pontos críticos de f são máximos ou mínimos globais;
- (c) nenhum ponto crítico de f é máximo local;
- (d) nenhuma das alternativas;
- (e) existem pontos críticos de f que não são máximos nem mínimos locais.

Questão 13. Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, t^3)$.

Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$, então a derivada da composta $g(t) = f(\gamma(t))$ em $t = 0$ é:

- (a) -1;
- (b) 0;
- (c) 3;
- (d) 1;
- (e) 2.

Questão 14. Sejam x, y e z números positivos, com produto $xyz = 1$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a) O valor mínimo da soma $x + y + z$ é 3;
- (b) A soma dos inversos $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ é menor ou igual a $x + y + z$;
- (c) O valor máximo da soma $x + y + z$ é 3;
- (d) A soma $x + y + z$ não tem nem máximo nem mínimo;
- (e) A soma $x + y + z$ é menor ou igual a 3.

Questão 15. Determine $T_2(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x, y) = xe^{xy} - x$ centrado em $(0, 0)$.

- (a) $T_2(x, y) = 1$;
- (b) $T_2(x, y) = x + y - \frac{1}{2}xy$;
- (c) $T_2(x, y) = 0$;
- (d) $T_2(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + xy)$;
- (e) $T_2(x, y) = x^2y - x^2$.

Questão 16. Calcule o polinômio de Taylor $T_2(x, y)$ de ordem 2 da função $f(x, y) = e^{xy} \cos(xy)$ centrado em $(0, 0)$.

- (a) $T_2(x, y) = 1 - xy$;
- (b) $T_2(x, y) = 1 + xy$;
- (c) $T_2(x, y) = xy$;
- (d) $T_2(x, y) = 1$;
- (e) $T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$.

Questão 17. Determine uma função $h(x)$ com a propriedade que exista uma função diferenciável $f(x, y)$ cujas derivadas parciais sejam $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + h(x)$.

- (a) $h(x) = x^2$;
- (b) não existe uma tal função $h(x)$;
- (c) $h(x) = -x^2$;
- (d) $h(x) = x^2y$;
- (e) a função h existe, mas não é nenhuma das funções dadas.

Questão 18. Calcule a distância d do ponto $P = (1, 1, 1)$ ao plano Π dado pela equação $x + y + z = 0$.

- (a) $d = \sqrt{2}$;
- (b) $d = 1$;
- (c) $d = \sqrt{3}$;
- (d) $d = 2$;
- (e) $d = 3$.

Questão 19. Qual dos conjuntos abaixo **não** é convexo?

- (a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$;
- (b) todos são convexos;
- (c) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$;
- (d) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y\}$;
- (e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x\}$.

Questão 20. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(u, v) = (uv^2, \cos(uv))$. Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a expressão correta para a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial u}$ da composta $g = f \circ \phi$ é:

- (a) $2vu \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$;
- (b) $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - u \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$;
- (c) $v \frac{\partial f}{\partial x} - v \cos(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$;
- (d) $v^2 \frac{\partial f}{\partial x} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial y}$;
- (e) $v^2 \frac{\partial f}{\partial y} - v \operatorname{sen}(uv) \frac{\partial f}{\partial x}$.

MAT 147 — Turma 2010221
Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
10 de Novembro de 2010

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **D**

| | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d | e |
| 2 | a | b | c | d | e |
| 3 | a | b | c | d | e |
| 4 | a | b | c | d | e |
| 5 | a | b | c | d | e |
| 6 | a | b | c | d | e |
| 7 | a | b | c | d | e |
| 8 | a | b | c | d | e |
| 9 | a | b | c | d | e |
| 10 | a | b | c | d | e |
| 11 | a | b | c | d | e |
| 12 | a | b | c | d | e |
| 13 | a | b | c | d | e |
| 14 | a | b | c | d | e |
| 15 | a | b | c | d | e |
| 16 | a | b | c | d | e |
| 17 | a | b | c | d | e |
| 18 | a | b | c | d | e |
| 19 | a | b | c | d | e |
| 20 | a | b | c | d | e |

Deixe em branco.

| Corretas | Erradas | Nota |
|-----------------|----------------|-------------|
| | | |