MAT 147 — Turma 2010221

Cálculo diferencial e integral II para Economia

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

10 de Novembro de 2010

Nome: ____

Número USP: _______________________________________

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.
- Um *ponto crítico* da função $f(x, y)$ é um ponto (x_0, y_0) no domínio da f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- A distância de um ponto $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a um plano Π que não contém p é o menor valor possível de $\|(a, b, c) - (x, y, z)\|$, com (x, y, z) pertencente ao plano Π.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{C}}$

Questão 1. Qual dos conjuntos abaixo é conexo?

(a) nenhuma das alternativas;
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, y \ne 0\}$;
(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ou } x < 0\}$;
(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \ge 3\}$;
(e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \ne 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

Questão 2. Qual é o enunciado correto do *Teorema de Schwarz*?

(a) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, então f tem todas as derivadas segundas contínuas em A;
(b) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em A, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ em A;
(c) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ em E, então f admite máximo e mínimo em E;
(d) Se f é diferenciável num aberto A, então $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ em A;
(e) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo em E.

Questão 3. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(u, v) = (uv^2, \cos(uv))$. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então a expressão correta para a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial u}$ da composta $g = f \circ \phi$ é:

(a) $2vu\frac{\partial f}{\partial x} - u\text{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$;
(b) $v^2\frac{\partial f}{\partial x} - u\text{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$;
(c) $v^2\frac{\partial f}{\partial y} - v\text{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial x}$;
(d) $v^2\frac{\partial f}{\partial x} - v\text{sen}(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$;
(e) $v\frac{\partial f}{\partial x} - v\cos(uv)\frac{\partial f}{\partial y}$.

Questão 4. Determine uma função diferenciável $f(x, y)$ cujas derivadas parciais sejam $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y^2$.

(a) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy^3 - yx^3$;
(b) Uma tal f existe, mas não é nenhuma das funções dadas;
(c) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + xy^3 - yx^3$;
(d) Uma tal função f não existe;
(e) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - xy^3 + yx^3$.

Questão 5. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que possui derivadas de todas as ordens. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \phi(x) + y^2$. Se $\phi'(0) = 0$, qual das afirmações abaixo é (necessariamente) verdadeira?

(a) $(0, 0)$ é ponto crítico de f, e é mínimo local se $\phi''(0) > 0$;
(b) $(0, 0)$ é ponto crítico de f somente se $\phi''(0) = 0$;
(c) $(0, 0)$ é ponto crítico de f, e é máximo local se $\phi''(0) < 0$;
(d) $(0, 0)$ é ponto crítico de f, e é máximo local se $\phi''(0) > 0$;
(e) $(0, 0)$ é ponto crítico de f, e é mínimo local se $\phi''(0) < 0$.

Questão 6. Qual é o enunciado correto do *Teorema de Weierstrass*?

(a) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto, e $f : E \to \mathbb{R}$ é contínua, então f tem máximo e mínimo em E;
(b) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é compacto e $f : E \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ em E, então f admite máximo e mínimo em E;
(c) Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto, e $f : A \to \mathbb{R}$ é uma função com todas as derivadas segundas contínuas em A, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ em A;
(d) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é fechado, então E é limitado;
(e) Se $E \subset \mathbb{R}^2$ é limitado, então E é fechado.

Questão 7. Sejam x, y e z números positivos, com produto $xyz = 1$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A soma $x + y + z$ é menor ou igual a 3;
(b) A soma $x + y + z$ não tem nem máximo nem mínimo;
(c) O valor máximo da soma $x + y + z$ é 3;
(d) O valor mínimo da soma $x + y + z$ é 3;
(e) A soma dos inversos $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ é menor ou igual a $x + y + z$.

Questão 8. Qual dos conjuntos abaixo **não** é convexo?

(a) todos são convexos;
(b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$;
(c) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x\}$;
(d) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$;
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y\}$.

Questão 9. Em qual conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ a função $f(x,y) = e^{xy}$ admite máximo e mínimo absoluto?

(a) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq xy \leq 4\}$;
(b) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 - y^2 \leq 4\}$;
(c) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2\}$;
(d) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;
(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 4\}$.

Questão 10. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, t^3)$.

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $\nabla f(1,0) = (2,1)$, então a derivada da composta $g(t) = f(\gamma(t))$ em $t = 0$ é:

(a) 3;
(b) -1;
(c) 2;
(d) 1;
(e) 0.

Questão 11. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ conexo é aberto;
(b) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ conexo é convexo;
(c) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ convexo é aberto;
(d) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ convexo é conexo;
(e) Um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ conexo é fechado.

Questão 12. Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável da forma $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x,y) = xy + 1$, então a expressão correta para a derivada parcial $\frac{\partial g}{\partial u}$ da composta $g = f \circ T$ é:

(a) $y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} + 1$;
(b) $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}$;
(c) $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} + 1$;
(d) $y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u}$;
(e) $x\frac{\partial x}{\partial u} + y\frac{\partial y}{\partial u}$.

Questão 13. Para a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$:

(a) $(1, 2)$ é um ponto de máximo local;
(b) ambos $(1, 2)$ e $(2, 1)$ são pontos de sela;
(c) $(2, 1)$ é um ponto de sela;
(d) $(2, 1)$ é um ponto de mínimo local;
(e) $(1, 2)$ é um ponto de sela.

Questão 14. Calcule a distância d do ponto $P = (1, 1, 1)$ ao plano Π dado pela equação $x + y + z = 0$.

(a) $d = 2$;
(b) $d = 1$;
(c) $d = \sqrt{2}$;
(d) $d = \sqrt{3}$;
(e) $d = 3$.

Questão 15. Determine uma função $h(x)$ com a propriedade que exista uma função diferenciável $f(x, y)$ cujas derivadas parciais sejam $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + h(x)$.

(a) não existe uma tal função $h(x)$;
(b) a função h existe, mas não é nenhuma das funções dadas;
(c) $h(x) = x^2y$;
(d) $h(x) = -x^2$;
(e) $h(x) = x^2$.

Questão 16. Calcule o polinômio de Taylor $T_2(x, y)$ de ordem 2 da função $f(x, y) = e^{xy}\cos(xy)$ centrado em $(0, 0)$.

(a) $T_2(x, y) = 1$;
(b) $T_2(x, y) = 1 - xy$;
(c) $T_2(x, y) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$;
(d) $T_2(x, y) = 1 + xy$;
(e) $T_2(x, y) = xy$.

Questão 17. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuja expressão é $f(x,y) = \text{sen}(x) + \cos(y)$. A respeito de seus pontos críticos, pode-se afirmar corretamente que:

(a) todos os pontos críticos de f são máximos ou mínimos globais;
(b) todos os pontos críticos de f são máximos ou mínimos locais;
(c) nenhuma das alternativas;
(d) existem pontos críticos de f que não são máximos nem mínimos locais;
(e) nenhum ponto crítico de f é máximo local.

Questão 18. Determine $T_2(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x,y) = xe^{xy} - x$ centrado em $(0,0)$.

(a) $T_2(x,y) = 0$;
(b) $T_2(x,y) = x^2y - x^2$;
(c) $T_2(x,y) = x + y - \frac{1}{2}xy$;
(d) $T_2(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + xy)$;
(e) $T_2(x,y) = 1$.

Questão 19. Estude a natureza dos pontos críticos da função $f(x,y) = xy + y^4 + y^2 - 6y - 5x + 1$.

(a) $(5, -504)$ é um ponto de máximo local;
(b) $(-504, 5)$ é um ponto de mínimo local;
(c) $(5, -504)$ é um ponto de mínimo local;
(d) $(-504, 5)$ é um ponto de sela;
(e) $(5, -504)$ é um ponto de sela.

Questão 20. Para qual das equações abaixo é possível garantir, através do Teorema da função implícita, que existe um conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ contendo o ponto p dado e uma função diferenciável $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \to U$ de maneira que as soluções da equação em U são exatamente o gráfico de ϕ?

(a) $e^x + y^2 + y\text{sen}(x) = 1$, $p = (0,0)$;
(b) $e^{x^2} - e^{y^2} = y^2$, $p = (0,0)$;
(c) $\cos(y^2) - x\cos(y) = 0$, $p = (1,0)$;
(d) nenhuma das alternativas;
(e) $x\cos(xy) = y$, $p = (0,0)$.

MAT 147 — Turma 2010221
Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
10 de Novembro de 2010

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas $\boxed{\text{C}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota