

MAT 147 — Turma 2010221  
Cálculo diferencial e integral II para Economia  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 1  
29 de Setembro de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$  denota o conjunto dos números reais, e  $\mathbb{R}^2$  é o conjunto de pares ordenados de números reais:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ .
- Um *ponto crítico* da função  $f(x, y)$  é um ponto  $(x_0, y_0)$  no domínio da  $f$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ .
- Uma função  $f$  é um *infinitésimo* em  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . A *ordem de infinitésimo* de  $f$  em  $x_0$  é o inteiro positivo  $n$  com a propriedade que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

C

**Questão 1.** Em qual das direções abaixo a função  $f(x, y) = e^x - e^y$  **de-**  
**crece** mais rapidamente, a partir do ponto  $(0, 0)$ ?

- (a) na direção de  $v = (1, 1)$ ;
- (b) na direção de  $v = (-1, 1)$ ;
- (c) na direção de  $v = (1, -1)$ ;
- (d) na direção de  $v = (0, 1)$ ;
- (e) na direção de  $v = (1, 0)$ .

**Questão 2.** O conjunto de todos os pontos críticos da função  $f(x, y) = x^2y^2$  é:

- (a) uma circunferência;
- (b) aberto;
- (c) fechado;
- (d) vazio;
- (e) uma reta.

**Questão 3.** Considere a função  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (a)  $f$  não admite derivadas parciais em  $(0, 0)$ ;
- (b)  $f$  não admite limite para  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ;
- (c)  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ ;
- (d)  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ ;
- (e)  $f$  não é contínua em  $(0, 0)$ .

**Questão 4.** Determine o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = 3 \cos(x + y) - 2 \sin(x - y)$$

no ponto  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}))$ .

- (a)  $z = 2x - \frac{\pi}{2} + 3y$ ;
- (b)  $z - \frac{\pi}{2} = -5x - y$ ;
- (c)  $z = x + y - \pi$ ;
- (d)  $z = -5x - y + \frac{3}{2}\pi$ ;
- (e)  $z = 5x + y - \frac{3}{2}\pi$ .

**Questão 5.** As derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  da função

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

são, respectivamente:

- (a) As derivadas parciais não existem;
- (b) 1 e 0;
- (c) 0 e 0;
- (d) 0 e 1;
- (e) 1 e 1.

**Questão 6.** Qual é a ordem de infinitésimo da função  $f(x) = \ln(1 + x^3)$  em  $x_0 = 0$ ?

- (a) 0;
- (b) 2;
- (c)  $\ln(1 + x_0^3)$ ;
- (d) 3;
- (e) 1.

**Questão 7.** Qual é o polinômio de Taylor  $T_4$  de ordem 4 centrado em  $x_0 = 0$  da função  $f(x) = 1 - \cos^3 x$ ?

- (a)  $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{8}x^4$ ;
- (b)  $T_5(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{51}x^5$ ;
- (c)  $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4$ ;
- (d)  $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ ;
- (e)  $T_5(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^4 + x^5$ .

**Questão 8.** Para quais valores de  $x$  o vetor  $\vec{v} = (-6, -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2)$  é perpendicular ao vetor  $\vec{w} = (-1, 2)$  e tem comprimento  $3\sqrt{5}$ ?

- (a)  $x = -2$ ;
- (b)  $x = 2$ ;
- (c)  $x = 3$ ;
- (d)  $x = -3$ ;
- (e)  $x = \sqrt{5}$ .

**Questão 9.** Calcule o limite  $L = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}$ .

- (a)  $L = +\infty$ ;
- (b)  $L = 3$ ;
- (c)  $L = 0$ ;
- (d)  $L = -\infty$ ;
- (e) o limite não existe.

**Questão 10.** Considere a função  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ . Suas curvas de nível são união de:

- (a) quadrados;
- (b) sinusóides;
- (c) retas;
- (d) parábolas;
- (e) círculos.

**Questão 11.** Calcule o limite  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$ .

- (a)  $L = +\infty$ ;
- (b)  $L = 0$ ;
- (c)  $L = \frac{1}{2}$ ;
- (d)  $L = -\infty$ ;
- (e)  $L = -\frac{1}{6}$ .

**Questão 12.** Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

onde  $\alpha$  é um número inteiro positivo. É possível afirmar que:

- (a)  $f$  é descontínua em  $(0, 0)$  para todo valor de  $\alpha$ ;
- (b)  $f$  é contínua em  $(0, 0)$  se  $\alpha > 1$ ;
- (c)  $f$  é descontínua em  $(0, 0)$  se  $\alpha = 2$ ;
- (d)  $f$  é contínua em  $(0, 0)$  se  $\alpha = 1$ ;
- (e)  $f$  é descontínua em  $(0, 0)$  se  $\alpha > 1$ .

**Questão 13.** Qual é o domínio  $D$  da função  $f(x, y) = \sqrt{1 + \ln(xy)}$ ?

- (a)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq \frac{1}{e}\}$ ;
- (b)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq \frac{1}{e}\}$ ;
- (c)  $D = \mathbb{R}^2$ ;
- (d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq e\}$ ;
- (e)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$ .

**Questão 14.** Seja  $f$  uma função diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , e com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1.$$

Quanto vale a derivada direcional da  $f$  no ponto  $(x_0, y_0)$  e na direção  $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ?

- (a)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (b)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- (c)  $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ ;
- (d)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ;
- (e) 0.

**Questão 15.** Determine o vetor  $\vec{v}$  perpendicular ao gráfico da função  $f(x, y) = (2-x)(1+y)$  no ponto  $(0, 0, 2)$  que aponta para cima (i.e., com terceira componente positiva) e de comprimento 2.

- (a)  $\vec{v} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ ;
- (b)  $\vec{v} = (0, 0, 2)$ ;
- (c)  $\vec{v} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ ;
- (d)  $\vec{v} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ ;
- (e)  $\vec{v} = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ .

**Questão 16.** Para qual valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  a função  $f$  é contínua no ponto  $(0, 0)$ ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln[(1 + x^2 + y^2)^3]}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ \alpha, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a)  $\alpha = 3$ ;
- (b)  $\alpha = 1$ ;
- (c)  $\alpha = 0$ ;
- (d) para nenhum  $\alpha$  a função  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ ;
- (e)  $\alpha = 2$ .

**Questão 17.** Qual dos pontos abaixo é crítico para a função

$$f(x, y) = e^{xy-2x-y+2} \quad ?$$

- (a)  $(2, 1)$ ;
- (b)  $(-1, -2)$ ;
- (c)  $(-2, -1)$ ;
- (d)  $(0, 0)$ ;
- (e)  $(1, 2)$ .

**Questão 18.** Dada uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida num aberto  $A \subset \mathbb{R}^2$ , e dado  $(x_0, y_0) \in A$ , qual das afirmações abaixo é correta?

- (a) Se existem as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , então  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ ;
- (b) Se  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$ , então existem as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ;
- (c) Se  $f$  é contínua em  $(x_0, y_0)$  então  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ ;
- (d) Se  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então existem as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ;
- (e) Se existem as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ , então  $f$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$ .

**Questão 19.** Qual dos seguintes conjuntos é aberto?

- (a) nenhum dos outros;
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} \leq 2\}$ ;
- (c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, \frac{1}{x^2 + y^2} < \frac{1}{4}\}$ ;
- (d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} \geq 2\}$ ;
- (e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, \frac{1}{x^2 + y^2} > \frac{1}{4}\}$ .

**Questão 20.** Calcule a derivada  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$  da função  $f(x, y) = e^{xy}$ .

- (a)  $x^2 y e^{xy}$ ;
- (b)  $xy^2 e^{xy}$ ;
- (c)  $ye^{xy}(2 + xy)$ ;
- (d)  $e^{x^2 y}$ ;
- (e) 0.

MAT 147 — Turma 2010221  
Cálculo diferencial e integral II para Economia  
Prof. Paolo Piccione  
Prova 1  
29 de Setembro de 2010

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Folha de Respostas** **C**

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

**Deixe em branco.**

<b>Corretas</b>	<b>Erradas</b>	<b>Nota</b>