MAT 147 — Turma 2010221

Cálculo diferencial e integral II para Economia

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

29 de Setembro de 2010

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
- Um *ponto crítico* da função $f(x, y)$ é um ponto (x_0, y_0) no domínio da f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.
- Uma função f é um *infinitésimo* em x_0 se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. A *ordem de infinitésimo* de f em x_0 é o inteiro positivo n com a propriedade que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{(x - x_0)^n} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{B}}$

Questão 1. Qual é o polinômio de Taylor T_4 de ordem 4 centrado em $x_0 = 0$ da função $f(x) = 1 - \cos^3 x$?

(a) $T_5(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5!}x^5$;
(b) $T_5(x) = x^3 - \frac{3}{8}x^4 + x^5$;
(c) $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$;
(d) $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{8}x^4$;
(e) $T_5(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4$.

Questão 2. O conjunto de todos os pontos críticos da função $f(x,y) = x^2y^2$ é:

(a) uma circunferência;
(b) aberto;
(c) fechado;
(d) vazio;
(e) uma reta.

Questão 3. Qual dos seguintes conjuntos é aberto?

(a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ \dfrac{1}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{4}\right\}$;
(b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} \geq 2\right\}$;
(c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^{xy} \leq 2\right\}$;
(d) nenhum dos outros;
(e) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ \dfrac{1}{x^2+y^2} > \dfrac{1}{4}\right\}$.

Questão 4. Considere a função $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$. Suas curvas de nível são união de:

(a) parábolas;
(b) retas;
(c) sinusóides;
(d) círculos;
(e) quadrados.

Questão 5. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

onde α é um número inteiro positivo. É possível afirmar que:

(a) f é descontínua em $(0,0)$ se $\alpha = 2$;
(b) f é descontínua em $(0,0)$ para todo valor de α;
(c) f é contínua em $(0,0)$ se $\alpha = 1$;
(d) f é descontínua em $(0,0)$ se $\alpha > 1$;
(e) f é contínua em $(0,0)$ se $\alpha > 1$.

Questão 6. Calcule o limite $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - 2xy}{x^2+y^2}$.

(a) $L = 3$;
(b) $L = -\infty$;
(c) $L = +\infty$;
(d) $L = 0$;
(e) o limite não existe.

Questão 7. Qual é o domínio D da função $f(x,y) = \sqrt{1 + \ln(xy)}$?

(a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq \frac{1}{e}\right\}$;
(b) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq \frac{1}{e}\right\}$;
(c) $D = \mathbb{R}^2$;
(d) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\right\}$;
(e) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq e\right\}$.

Questão 8. Em qual das direções abaixo a função $f(x,y) = e^x - e^y$ **decresce** mais rapidamente, a partir do ponto $(0,0)$?

(a) na direção de $v = (1,-1)$;
(b) na direção de $v = (1,1)$;
(c) na direção de $v = (-1,1)$;
(d) na direção de $v = (1,0)$;
(e) na direção de $v = (0,1)$.

Questão 9. Determine o plano tangente ao gráfico da função

$$f(x, y) = 3\cos(x + y) - 2\sin(x - y)$$

no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\right)$.

(a) $z = x + y - \pi$;
(b) $z = 2x - \frac{\pi}{2} + 3y$;
(c) $z = -5x - y + \frac{3}{2}\pi$;
(d) $z = 5x + y - \frac{3}{2}\pi$;
(e) $z - \frac{\pi}{2} = -5x - y$.

Questão 10. Dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$ definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, e dado $(x_0, y_0) \in A$, qual das afirmações abaixo é correta?

(a) Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, então f é diferenciável em (x_0, y_0);
(b) Se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, então f é contínua em (x_0, y_0);
(c) Se f é contínua em (x_0, y_0) então f é diferenciável em (x_0, y_0);
(d) Se f é contínua em (x_0, y_0), então existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$;
(e) Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Questão 11. Calcule o limite $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - \sin^3 x}{x^5}$.

(a) $L = -\infty$;
(b) $L = \frac{1}{2}$;
(c) $L = +\infty$;
(d) $L = -\frac{1}{6}$;
(e) $L = 0$.

Questão 12. Determine o vetor $\vec{v}$ perpendicular ao gráfico da função $f(x,y) = (2-x)(1+y)$ no ponto $(0,0,2)$ que aponta para cima (i.e., com terceira componente positiva) e de comprimento 2.

(a) $\vec{v} = (0,0,2)$;
(b) $\vec{v} = \big(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big)$;
(c) $\vec{v} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$;
(d) $\vec{v} = \big(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big)$;
(e) $\vec{v} = \big(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big)$.

Questão 13. Qual é a ordem de infinitésimo da função $f(x) = \ln(1+x^3)$ em $x_0 = 0$?

(a) $\ln(1+x_0^3)$;
(b) 3;
(c) 1;
(d) 0;
(e) 2.

Questão 14. Calcule a derivada $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ da função $f(x,y) = e^{xy}$.

(a) e^{x^2y};
(b) x^2ye^{xy};
(c) xy^2e^{xy};
(d) $ye^{xy}(2+xy)$;
(e) 0.

Questão 15. Para qual valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função f é contínua no ponto $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln\big[(1+x^2+y^2)^3\big]}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ \alpha, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) para nenhum α a função f é contínua em $(0,0)$;
(b) $\alpha = 1$;
(c) $\alpha = 2$;
(d) $\alpha = 0$;
(e) $\alpha = 3$.

Questão 16. As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ da função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

são, respectivamente:

(a) 1 e 1;
(b) 1 e 0;
(c) 0 e 0;
(d) 0 e 1;
(e) As derivadas parciais não existem.

Questão 17. Seja f uma função diferenciável em (x_0, y_0), e com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -1.$$

Quanto vale a derivada direcional da f no ponto (x_0, y_0) e na direção $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

(a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(b) 0;
(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(d) $-\frac{3}{\sqrt{2}}$;
(e) $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Questão 18. Para quais valores de x o vetor $\vec{v} = (-6, -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2)$ é perpendicular ao vetor $\vec{w} = (-1, 2)$ e tem comprimento $3\sqrt{5}$?

(a) $x = -2$;
(b) $x = 2$;
(c) $x = 3$;
(d) $x = \sqrt{5}$;
(e) $x = -3$.

Questão 19. Qual dos pontos abaixo é crítico para a função

$$f(x,y) = e^{xy-2x-y+2} \quad ?$$

(a) $(2,1)$;
(b) $(1,2)$;
(c) $(-2,-1)$;
(d) $(-1,-2)$;
(e) $(0,0)$.

Questão 20. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) f não é contínua em $(0,0)$;
(b) f é contínua em $(0,0)$;
(c) f não admite derivadas parciais em $(0,0)$;
(d) f não admite limite para $(x,y) \to (0,0)$;
(e) f é diferenciável em $(0,0)$.

MAT 147 — Turma 2010221
Cálculo diferencial e integral II para Economia
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
29 de Setembro de 2010

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas $\boxed{\text{B}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**