MAT 122 — Álgebra Linear – Prova SUB

Prof. Paolo Piccione

6 de dezembro de 2018

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os espaços vetorias nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é $\mathbb{R}$. Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Data uma transformação linear $T\colon V \to W$ entre espaços vetoriais, $\boxed{\mathrm{Ker}(T)}$ denota o núcleo de T e $\boxed{\mathrm{Im}(T)}$ a imagem de T.
- Dado um espaço vetorial V, um produto escalar em V será denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e a relativa norma será denotada por $\|\cdot\|$.
- Para todo inteiro positivo n, o símbulo $\mathbb{R}^n$ denota o espaço vetorial
$$\big\{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 1,\dots,n\big\}.$$
O *produto escalar canônico* de $\mathbb{R}^n$ é definido por:
$$\big\langle(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{D}}$

Questão 1. *Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear e seja M a matriz $n \times n$ associada a T relativamente à base canônica. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

(I) *Se T tiver n autovalores reais distintos, então M é diagonalizável;*
(II) *Se T tiver algum autovalor repetido (ou seja, raíz do polinômio caraterístico com multiplicidade maior que 1), então M não é diagonalizável;*
(III) *T possui no máximo n autovalores distintos;*
(IV) *se M é diagonalizável, então para toda base $v_1, \ldots, v_n$ de V, o vetor $T(v_i)$ é um múltiplo de v_i para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Respostas:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(b) são verdadeiras apenas as afirmações (I), e (III);
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) são verdadeiras apenas as afirmações (II), (III) e (IV).

Questão 2. *Determine as soluções do sistema linear não homogêneo:*

$$\begin{cases} 2x + 2y \phantom{{}+2z} = 2, \\ 2x \phantom{{}+2y} + z = 1, \\ x + 2y + 2z = -1. \end{cases}$$

Respostas:

(a) $(x, y, z) = (-t, 1 + t, t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(b) o sistema não admite soluções;
(c) $(x, y, z) = (t, 1 - t, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(d) $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(e) $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

Questão 3. *Seja V ume espaço vetorial com $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V, e $T: V \to V$ um operador linear representado pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

na base $\mathcal{B}$. Determine a dimensão e uma base de $\mathrm{Ker}(T)$.
(veja também Questão 20)

Respostas:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, base: $w = v_1 + v_2$;

(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$, base: $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_1 + v_2$;

(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$, base: $w_1 = 2v_1 - v_2$, $w_2 = v_3$;

(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, base: $w = 2v_1 - v_2$;

(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, base: $w = v_1 - v_2$.

Questão 4. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 2, seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ uma base de V, e seja $T: V \to V$ um operador linear cuja matriz associada relativamente à base $\mathcal{B}$ é:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine $T(2v_1 + v_2)$.
(Veja também Questão 5)

Respostas:

(a) $T(2v_1 + v_2) = 3v_1 + 2v_2$;

(b) $T(2v_1 + v_2) = 4v_1 + v_2$;

(c) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + 3v_2$;

(d) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + v_2$;

(e) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + 2v_2$.

Questão 5. *Sejam V, $\mathcal{B}$, T e M como na Questão 4. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(I) *v_1 é um autovetor de T;*
(II) *v_2 é um autovetor de T;*
(III) *$\lambda = 2$ é um autovalor de T;*
(IV) *T é diagonalizável.*

Respostas:

(a) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(b) Apenas as afirmações (I), (II) e (III) são verdadeiras;

(c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(d) Todas as afirmações são verdadeiras;

(e) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Questão 6. *Considere o produto escalar canônico do* $\mathbb{R}^3$*, e a base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$*, onde* $v_1 = (1,1,1)$*,* $v_2 = (1,0,2)$ *e* $v_3 = (2,1,0)$*. Seja* $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ *a base ortonormal obtida de* $\mathcal{B}$ *pelo método de Gram–Schmidt. Calcule* e_2*.*

Respostas:

(a) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$;

(b) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,1)$;

(c) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$;

(d) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$;

(e) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

Questão 7. *Calcule a dimensão e uma base* $\mathcal{B}$ *do seguinte espaço vetorial:*

$$V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - 4z = 0\big\}.$$

Respostas:

(a) $\dim(V) = 1$, $\mathcal{B} = \big\{(1,1,1)\big\}$;

(b) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \big\{(1,-1,0), (0,2,1)\big\}$;

(c) $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \big\{(1,1,1), (1,-1,0), (0,2,1)\big\}$;

(d) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \big\{(1,1,0), (0,2,1)\big\}$;

(e) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \big\{(1,-1,0), (0,-2,1)\big\}$.

Questão 8. *Como na Questão 19, determine o espaço* $V \subset \mathcal{P}_3$ *ortogonal ao vetor* $p(x) = x^2$*.*

Respostas:

(a) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{5}d = 0\Big\}$;

(b) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d = 0\Big\}$;

(c) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{6}d = 0\Big\}$;

(d) $V = \Big\{a + bx + cx^2 : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = 0\Big\}$;

(e) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d = 0\Big\}$.

Questão 9. *Considere em* $\mathbb{R}^3$ *um produto escalar no qual a base formada por* $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ *e* $v_3 = (1,1,1)$ *é ortonormal. Denote com* $\|\cdot\|$ *a norma relativa a este produto escalar. Calcule* $\|(x,y,z)\|^2$

Respostas:

(a) $\|(x,y,z)\|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz$;
(b) $\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$;
(c) $\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy$;
(d) $\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2$;
(e) $\|(x,y,z)\|^2 = z^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2yz - 2xy$.

Questão 10. *Calcule o polinômio caraterístico* $P(\lambda)$ *do operador linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *representado na base canônica pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

(a) $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda - 37$;
(b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 22$;
(c) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 47$;
(d) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 51$;
(e) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda - 31$.

Questão 11. *Seja* V *um espaço vetorial com produto escalar, e* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *uma base de* V, *com a propriedade que* $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ *quando* $i \neq j$, *e* $\|v_i\| = 2$ *para todo* i. *Se* $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, *com* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *para todo* i, *qual é o valor de* λ_1*?*

Respostas:

(a) $\lambda_1 = 2\langle v, v_1 \rangle$;
(b) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / 4$;
(c) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle$;
(d) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / 2$;
(e) $\lambda_1 = 4\langle v, v_1 \rangle$.

Questão 12. *Em* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto escalar canônico, determine o subespaço ortogonal* $V^{\perp}$*, onde* $V \subset \mathbb{R}^4$ *é o subespaço gerado por* $v_1 = (2, 1, -1, 0)$*,* $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ *e* $v_3 = (0, 0, 0, 1)$*.*

Respostas:

(a) $V^{\perp} = \big\{(-a, 3a, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\big\}$;

(b) $V^{\perp} = \big\{(-a, 3a, a, 0) : a \in \mathbb{R}\big\}$;

(c) $V^{\perp} = \big\{(-a, 3a, a, a) : a \in \mathbb{R}\big\}$;

(d) $V^{\perp} = \big\{(c, 3a, a, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\big\}$;

(e) $V^{\perp} = \mathbb{R} \cdot (1, -3, -1, 0)$.

Questão 13. *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *munido do produto escalar canônico. Determine a projeção ortogonal* $P_W(v)$ *do vetor* $v = (3, 2, 1)$ *no subespaço* W *gerado pelos vetores* $(0, -1, 1)$ *e* $(1, 1, -1)$*.*

Respostas:

(a) $P(v) = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\big)$;

(b) $P(v) = \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\big)$;

(c) $P(v) = \big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\big)$;

(d) $P(v) = \big(-1, \frac{1}{2}, 3\big)$;

(e) $P(v) = \big(3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\big)$.

Questão 14. *Sejam* V *e* W *dois espaços vetoriais, e* $T \colon V \to W$ *uma transformação linear. Qual é o enunciado correto do Teorema do Núcleo e da Imágem?*

Respostas:

(a) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(W)$;

(b) $\dim\big(\ker(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(W)$;

(c) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V)$;

(d) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V) - \dim(W)$;

(e) $\dim\big(\ker(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V)$.

Questão 15. *Considere a transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x, y, z) = (-x - 2y + z, x + 2y - z, 2x + 4y - 2z).$$

Determine uma base de $\mathrm{Ker}(T)$.

Respostas:

(a) $\big\{(2, -1, 0), (1, 1, 1)\big\}$;

(b) $\big\{(1, -2, -1)\big\}$;

(c) $\big\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\big\}$;

(d) $\big\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\big\}$;

(e) $\big\{(1, 2, -1)\big\}$.

Questão 16. *Considere o operador linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por* $T(x, y, z) = (x, x, x)$, *e seja* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *a base de* $\mathbb{R}^3$ *dada por* $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ *e* $v_3 = (0, 0, 1)$. *Determine a matriz* M *associada a* T *relativamente à base* $\mathcal{B}$.

Respostas:

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Questão 17. *Escolha entre as afirmações abaixo sobre a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

qual apresenta o raciocínio correto, e que leva à conclusão correta.

(I) Matrizes que possuem apenas um autovalor ou são diagonais, ou não são diagonalizáveis. Assim, a matriz A não é diagonalizável, pois ela possui um uúnico autovalor $\lambda = 2$ e A não é diagonal.

(II) A matriz A não é diagonalizável, pois seu polinômio caraterístico possui raízes complexas.

(III) A matriz A é diagonalizável, pois seu polinômio caraterístico possui duas raízes reais distintas

(IV) A matriz A não é diagonalizável, pois seus autovalores são menores que o determinante de A^2.

Respostas:

(a) apenas a (IV) é correta;

(b) todos os raciocínios são falsos;

(c) apenas a (II) é correta;

(d) apenas a (I) é correta;

(e) apenas a (III) é correta.

Questão 18. *Calcule a matriz A^{-1} inversa da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Respostas:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$;

(e) A não é inversível.

Questão 19. *No espaço vetorial $\mathcal{P}_3(x)$ de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a 3 na variável x, considere o produto escalar definido por:*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x.$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ de forma tal que o polinômio $p(x) = x$ seja ortogonal ao polinômio $q(x) = x + 2ax^2$.
(O espaço $\mathcal{P}_3(x)$ com o mesmo produto escalar é considerado também na Questão 8)

Respostas:

(a) $a = -\frac{1}{3}$;

(b) $a = -\frac{1}{4}$;

(c) $a = -\frac{3}{2}$;

(d) $a = -\frac{4}{5}$;

(e) $a = -\frac{2}{3}$.

Questão 20. *Considere os dados da Quesão 3. Determine a dimensão e uma base de* $\mathrm{Im}(T)$*.*

Respostas:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$, base: $u = 2v_1 - v_2$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_3$;
(c) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = 2v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$, base: $u = v_3$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$.

MAT 122 — Álgebra Linear
Prof. Paolo Piccione
Prova SUB
6 de dezembro de 2018

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\text{D}}$

Turma:

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**