# MAT 122 — Álgebra Linear – Prova SUB

Prof. Paolo Piccione

6 de dezembro de 2018

Nome: ______________________________________________

Número USP: ________________________________________

Assinatura: _________________________________________

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- Todos os espaços vetorias nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é $\mathbb{R}$. Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Data uma transformação linear $T: V \to W$ entre espaços vetoriais, $\boxed{\mathrm{Ker}(T)}$ denota o núcleo de $T$ e $\boxed{\mathrm{Im}(T)}$ a imagem de $T$.
- Dado um espaço vetorial $V$, um produto escalar em $V$ será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e a relativa norma será denotada por $\| \cdot \|$.
- Para todo inteiro positivo $n$, o símbulo $\mathbb{R}^n$ denota o espaço vetorial
$$\big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 1, \ldots, n\big\}.$$
O *produto escalar canônico* de $\mathbb{R}^n$ é definido por:
$$\big\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \big\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME***
***NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

$\boxed{\mathbf{B}}$

**Questão 1.** *Como na Questão 20, determine o espaço $V \subset \mathcal{P}_3$ ortogonal ao vetor $p(x) = x^2$.*

***Respostas:***

(a) $V = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d = 0\right\}$;

(b) $V = \left\{a + bx + cx^2 : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = 0\right\}$;

(c) $V = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{5}d = 0\right\}$;

(d) $V = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 : -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d = 0\right\}$;

(e) $V = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{6}d = 0\right\}$.

---

**Questão 2.** *Escolha entre as afirmações abaixo sobre a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

*qual apresenta o raciocínio correto, e que leva à conclusão correta.*

(I) Matrizes que possuem apenas um autovalor ou são diagonais, ou não são diagonalizáveis. Assim, a matriz $A$ não é diagonalizável, pois ela possui um uúnico autovalor $\lambda = 2$ e $A$ não é diagonal.

(II) A matriz $A$ não é diagonalizável, pois seu polinômio caraterístico possui raízes complexas.

(III) A matriz $A$ é diagonalizável, pois seu polinômio caraterístico possui duas raízes reais distintas

(IV) A matriz $A$ não é diagonalizável, pois seus autovalores são menores que o determinante de $A^2$.

***Respostas:***

(a) todos os raciocínios são falsos;

(b) apenas a (IV) é correta;

(c) apenas a (II) é correta;

(d) apenas a (III) é correta;

(e) apenas a (I) é correta.

---

**Questão 3.** *Considere os dados da Quesão 18. Determine a dimensão e uma base de* $\mathrm{Im}(T)$.

***Respostas:***

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = 2v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;

(b) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_3$;

(c) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$, base: $u = v_3$;

(d) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$, base: $u = 2v_1 - v_2$;

(e) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$.

---

**Questão 4.** *Determine as soluções do sistema linear não homogêneo:*

$$\begin{cases} 2x + 2y \phantom{{}+2z} = 2, \\ 2x \phantom{{}+2y} + z = 1, \\ x + 2y + 2z = -1. \end{cases}$$

***Respostas:***

(a) $(x, y, z) = (t, 1 - t, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(b) $(x, y, z) = (1, 0, -1)$;
(c) $(x, y, z) = (-t, 1 + t, t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(d) $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
(e) o sistema não admite soluções.

---

**Questão 5.** *Sejam $V$, $\mathcal{B}$, $T$ e $M$ como na Questão 9. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(I) *$v_1$ é um autovetor de $T$;*
(II) *$v_2$ é um autovetor de $T$;*
(III) *$\lambda = 2$ é um autovalor de $T$;*
(IV) *$T$ é diagonalizável.*

***Respostas:***

(a) Todas as afirmações são verdadeiras;
(b) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) Apenas as afirmações (I), (II) e (III) são verdadeiras;
(d) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(e) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

---

**Questão 6.** *Sejam $V$ e $W$ dois espaços vetoriais, e $T: V \to W$ uma transformação linear. Qual é o enunciado correto do Teorema do Núcleo e da Imágem?*

***Respostas:***

(a) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V)$;
(b) $\dim\big(\ker(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V)$;
(c) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(W)$;
(d) $\dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(V) - \dim(W)$;
(e) $\dim\big(\ker(T)\big) - \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = \dim(W)$.

---

**Questão 7.** *Calcule o polinômio caraterístico $P(\lambda)$ do operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representado na base canônica pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

***Respostas:***

(a) $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda - 37$;
(b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 47$;
(c) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 51$;
(d) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 22$;
(e) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda - 31$.

---

**Questão 8.** *Considere em $\mathbb{R}^3$ um produto escalar no qual a base formada por $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$ e $v_3 = (1,1,1)$ é ortonormal. Denote com $\|\cdot\|$ a norma relativa a este produto escalar. Calcule $\|(x,y,z)\|^2$*

***Respostas:***

(a) $\|(x,y,z)\|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz$;
(b) $\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2$;
(c) $\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$;
(d) $\|(x,y,z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy$;
(e) $\|(x,y,z)\|^2 = z^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2yz - 2xy$.

---

**Questão 9.** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão 2, seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ uma base de $V$, e seja $T\colon V \to V$ um operador linear cuja matriz associada relativamente à base $\mathcal{B}$ é:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Determine $T(2v_1 + v_2)$.*
*(Veja também Questão 5)*

***Respostas:***

(a) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + v_2$;
(b) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + 3v_2$;
(c) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + 2v_2$;
(d) $T(2v_1 + v_2) = 4v_1 + v_2$;
(e) $T(2v_1 + v_2) = 3v_1 + 2v_2$.

---

**Questão 10.** *Considere a transformação linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x, y, z) = (-x - 2y + z, x + 2y - z, 2x + 4y - 2z).$$

*Determine uma base de* $\operatorname{Ker}(T)$.

***Respostas:***

(a) $\{(1, 2, -1)\}$ ;
(b) $\{(2, -1, 0), (1, 1, 1)\}$ ;
(c) $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$;
(d) $\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\}$ ;
(e) $\{(1, -2, -1)\}$ .

---

**Questão 11.** *Seja* $V = \mathbb{R}^3$ *munido do produto escalar canônico. Determine a projeção ortogonal* $P_W(v)$ *do vetor* $v = (3, 2, 1)$ *no subespaço* $W$ *gerado pelos vetores* $(0, -1, 1)$ *e* $(1, 1, -1)$.

***Respostas:***

(a) $P(v) = \left(3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$;
(b) $P(v) = \left(-1, \frac{1}{2}, 3\right)$;
(c) $P(v) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$;
(d) $P(v) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$;
(e) $P(v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

---

**Questão 12.** *Considere o operador linear* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por* $T(x, y, z) = (x, x, x)$, *e seja* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *a base de* $\mathbb{R}^3$ *dada por* $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ *e* $v_3 = (0, 0, 1)$. *Determine a matriz* $M$ *associada a* $T$ *relativamente à base* $\mathcal{B}$.

***Respostas:***

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Questão 13.** *Calcule a matriz $A^{-1}$ inversa da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

***Respostas:***

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$;

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$;

(e) $A$ não é inversível.

---

**Questão 14.** *Considere o produto escalar canônico do $\mathbb{R}^3$, e a base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,2)$ e $v_3 = (2,1,0)$. Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base ortonormal obtida de $\mathcal{B}$ pelo método de Gram–Schmidt. Calcule $e_2$.*

***Respostas:***

(a) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$;

(b) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$;

(c) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$;

(d) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,1)$;

(e) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

**Questão 15.** *Em* $\mathbb{R}^4$ *munido do produto escalar canônico, determine o subespaço ortogonal* $V^\perp$*, onde* $V \subset \mathbb{R}^4$ *é o subespaço gerado por* $v_1 = (2, 1, -1, 0)$*,* $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ *e* $v_3 = (0, 0, 0, 1)$*.*

***Respostas:***

(a) $V^\perp = \big\{(-a, 3a, a, 0) : a \in \mathbb{R}\big\}$;
(b) $V^\perp = \big\{(c, 3a, a, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\big\}$;
(c) $V^\perp = \mathbb{R} \cdot (1, -3, -1, 0)$;
(d) $V^\perp = \big\{(-a, 3a, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\big\}$;
(e) $V^\perp = \big\{(-a, 3a, a, a) : a \in \mathbb{R}\big\}$.

---

**Questão 16.** *Calcule a dimensão e uma base* $\mathcal{B}$ *do seguinte espaço vetorial:*

$$V = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - 4z = 0\big\}.$$

***Respostas:***

(a) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \big\{(1, -1, 0), (0, -2, 1)\big\}$;
(b) $\dim(V) = 1$, $\mathcal{B} = \big\{(1, 1, 1)\big\}$;
(c) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \big\{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\big\}$;
(d) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \big\{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\big\}$;
(e) $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \big\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 2, 1)\big\}$.

---

**Questão 17.** *Seja* $V$ *um espaço vetorial com produto escalar, e* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *uma base de* $V$*, com a propriedade que* $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ *quando* $i \neq j$*, e* $\|v_i\| = 2$ *para todo* $i$*. Se* $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$*, com* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ *para todo* $i$*, qual é o valor de* $\lambda_1$*?*

***Respostas:***

(a) $\lambda_1 = 2\langle v, v_1\rangle$;
(b) $\lambda_1 = \langle v, v_1\rangle/4$;
(c) $\lambda_1 = 4\langle v, v_1\rangle$;
(d) $\lambda_1 = \langle v, v_1\rangle$;
(e) $\lambda_1 = \langle v, v_1\rangle/2$.

---

**Questão 18.** *Seja $V$ ume espaço vetorial com $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de $V$, e $T\colon V \to V$ um operador linear representado pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

*na base $\mathcal{B}$. Determine a dimensão e uma base de $\mathrm{Ker}(T)$.*
*(veja também Questão 3)*

***Respostas:***

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, base: $w = 2v_1 - v_2$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, base: $w = v_1 + v_2$;
(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$, base: $w = v_1 - v_2$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$, base: $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_1 + v_2$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$, base: $w_1 = 2v_1 - v_2$, $w_2 = v_3$.

---

**Questão 19.** *Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear e seja $M$ a matriz $n \times n$ associada a $T$ relativamente à base canônica. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

(I) *Se $T$ tiver $n$ autovalores reais distintos, então $M$ é diagonalizável;*
(II) *Se $T$ tiver algum autovalor repetido (ou seja, raíz do polinômio caraterístico com multiplicidade maior que 1), então $M$ não é diagonalizável;*
(III) *$T$ possui no máximo $n$ autovalores distintos;*
(IV) *se $M$ é diagonalizável, então para toda base $v_1, \ldots, v_n$ de $V$, o vetor $T(v_i)$ é um múltiplo de $v_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.*

***Respostas:***

(a) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(b) são verdadeiras apenas as afirmações (I), e (III);
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) são verdadeiras apenas as afirmações (II), (III) e (IV);
(e) todas as afirmações são verdadeiras.

---

**Questão 20.** *No espaço vetorial $\mathcal{P}_3(x)$ de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a 3 na variável $x$, considere o produto escalar definido por:*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x.$$

*Determine $a \in \mathbb{R}$ de forma tal que o polinômio $p(x) = x$ seja ortogonal ao polinômio $q(x) = x + 2ax^2$.*
*(O espaço $\mathcal{P}_3(x)$ com o mesmo produto escalar é considerado também na Questão 1)*

***Respostas:***

(a) $a = -\frac{3}{2}$;

(b) $a = -\frac{1}{3}$;

(c) $a = -\frac{1}{4}$;

(d) $a = -\frac{4}{5}$;

(e) $a = -\frac{2}{3}$.

---

MAT 122 — Álgebra Linear
Prof. Paolo Piccione
Prova SUB
6 de dezembro de 2018

Nome: ____________________________________________

Número USP: ______________________________________

Assinatura: ________________________________________

## Folha de Respostas $\boxed{\textbf{B}}$

Turma:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | a | b | c | d | e |
| **2** | a | b | c | d | e |
| **3** | a | b | c | d | e |
| **4** | a | b | c | d | e |
| **5** | a | b | c | d | e |
| **6** | a | b | c | d | e |
| **7** | a | b | c | d | e |
| **8** | a | b | c | d | e |
| **9** | a | b | c | d | e |
| **10** | a | b | c | d | e |
| **11** | a | b | c | d | e |
| **12** | a | b | c | d | e |
| **13** | a | b | c | d | e |
| **14** | a | b | c | d | e |
| **15** | a | b | c | d | e |
| **16** | a | b | c | d | e |
| **17** | a | b | c | d | e |
| **18** | a | b | c | d | e |
| **19** | a | b | c | d | e |
| **20** | a | b | c | d | e |

**Deixe em branco.**

| **Corretas** | **Erradas** | **Nota** |
|---|---|---|
| | | |