

MAT 122 — Álgebra Linear – Prova SUB

Prof. Paolo Piccione

6 de dezembro de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os espaços vetoriais nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é \mathbb{R} . Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Dada uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ entre espaços vetoriais, $\boxed{\text{Ker}(T)}$ denota o núcleo de T e $\boxed{\text{Im}(T)}$ a imagem de T .
- Dado um espaço vetorial V , um produto escalar em V será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e a relativa norma será denotada por $\| \cdot \|$.
- Para todo inteiro positivo n , o símbolo \mathbb{R}^n denota o espaço vetorial

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

O *produto escalar canônico* de \mathbb{R}^n é definido por:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

A

Questão 1. Calcule a matriz A^{-1} inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Respostas:

$$(a) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$$

(b) A não é inversível;

$$(c) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix};$$

$$(d) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix};$$

$$(e) A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Questão 2. Considere em \mathbb{R}^3 um produto escalar no qual a base formada por $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ é ortonormal. Denote com $\|\cdot\|$ a norma relativa a este produto escalar. Calcule $\|(x, y, z)\|^2$

Respostas:

$$(a) \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2;$$

$$(b) \|(x, y, z)\|^2 = z^2 + 2y^2 + 2x^2 - 2yz - 2xy;$$

$$(c) \|(x, y, z)\|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz;$$

$$(d) \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz;$$

$$(e) \|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy.$$

Questão 3. Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x, x, x)$, e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ a base de \mathbb{R}^3 dada por $v_1 = (0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Determine a matriz M associada a T relativamente à base \mathcal{B} .

Respostas:

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

(b) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(e) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Questão 4. Calcule o polinômio característico $P(\lambda)$ do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representado na base canônica pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

(a) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 51;$

(b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda - 37;$

(c) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 47;$

(d) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda - 31;$

(e) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 22.$

Questão 5. Considere o produto escalar canônico do \mathbb{R}^3 , e a base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (2, 1, 0)$. Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base ortonormal obtida de \mathcal{B} pelo método de Gram-Schmidt. Calcule e_2 .

Respostas:

- (a) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$;
- (b) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1)$;
- (c) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$;
- (d) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$;
- (e) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

Questão 6. Sejam V e W dois espaços vetoriais, e $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Qual é o enunciado correto do Teorema do Núcleo e da Imagem?

Respostas:

- (a) $\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V) - \dim(W)$;
- (b) $\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(W)$;
- (c) $\dim(\ker(T)) - \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(W)$;
- (d) $\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V)$;
- (e) $\dim(\ker(T)) - \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V)$.

Questão 7. Seja V um espaço vetorial com $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V , e $T: V \rightarrow V$ um operador linear representado pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

na base \mathcal{B} . Determine a dimensão e uma base de $\operatorname{Ker}(T)$.
(veja também Questão 10)

Respostas:

- (a) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2$, base: $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_1 + v_2$;
- (b) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 2$, base: $w_1 = 2v_1 - v_2$, $w_2 = v_3$;
- (c) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$, base: $w = 2v_1 - v_2$;
- (d) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$, base: $w = v_1 - v_2$;
- (e) $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = 1$, base: $w = v_1 + v_2$.

Questão 8. Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido do produto escalar canônico. Determine a projeção ortogonal $P_W(v)$ do vetor $v = (3, 2, 1)$ no subespaço W gerado pelos vetores $(0, -1, 1)$ e $(1, 1, -1)$.

Respostas:

- (a) $P(v) = (3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- (b) $P(v) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3)$;
- (c) $P(v) = (-1, \frac{1}{2}, 3)$;
- (d) $P(v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$;
- (e) $P(v) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Questão 9. Escolha entre as afirmações abaixo sobre a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

qual apresenta o raciocínio correto, e que leva à conclusão correta.

- (I) Matrizes que possuem apenas um autovalor ou são diagonais, ou não são diagonalizáveis. Assim, a matriz A não é diagonalizável, pois ela possui um único autovalor $\lambda = 2$ e A não é diagonal.
- (II) A matriz A não é diagonalizável, pois seu polinômio característico possui raízes complexas.
- (III) A matriz A é diagonalizável, pois seu polinômio característico possui duas raízes reais distintas.
- (IV) A matriz A não é diagonalizável, pois seus autovalores são menores que o determinante de A^2 .

Respostas:

- (a) apenas a (I) é correta;
- (b) apenas a (IV) é correta;
- (c) todos os raciocínios são falsos;
- (d) apenas a (III) é correta;
- (e) apenas a (II) é correta.

Questão 10. Considere os dados da Questão 7. Determine a dimensão e uma base de $\text{Im}(T)$.

Respostas:

- (a) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$, base: $u = 2v_1 - v_2$;
 - (b) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, base: $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_3$;
 - (c) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, base: $u_1 = 2v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;
 - (d) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, base: $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;
 - (e) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$, base: $u = v_3$.
-

Questão 11. Calcule a dimensão e uma base \mathcal{B} do seguinte espaço vetorial:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - 4z = 0\}.$$

Respostas:

- (a) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, -2, 1)\}$;
- (b) $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$;
- (c) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$;
- (d) $\dim(V) = 2$, $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 2, 1)\}$;
- (e) $\dim(V) = 1$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1)\}$.

Questão 12. Sejam V , \mathcal{B} , T e M como na Questão 17. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (I) v_1 é um autovetor de T ;
- (II) v_2 é um autovetor de T ;
- (III) $\lambda = 2$ é um autovalor de T ;
- (IV) T é diagonalizável.

Respostas:

- (a) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
- (b) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (c) Apenas as afirmações (I), (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) Todas as afirmações são verdadeiras;
- (e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Questão 13. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (-x - 2y + z, x + 2y - z, 2x + 4y - 2z).$$

Determine uma base de $\text{Ker}(T)$.

Respostas:

- (a) $\{(1, 2, -1)\}$;
 - (b) $\{(2, -1, 0), (1, 0, 1)\}$;
 - (c) $\{(1, -2, -1)\}$;
 - (d) $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$;
 - (e) $\{(2, -1, 0), (1, 1, 1)\}$.
-

Questão 14. No espaço vetorial $\mathcal{P}_3(x)$ de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a 3 na variável x , considere o produto escalar definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \, dx.$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ de forma tal que o polinômio $p(x) = x$ seja ortogonal ao polinômio $q(x) = x + 2ax^2$.

(O espaço $\mathcal{P}_3(x)$ com o mesmo produto escalar é considerado também na Questão 20)

Respostas:

- (a) $a = -\frac{2}{3}$;
- (b) $a = -\frac{4}{5}$;
- (c) $a = -\frac{3}{2}$;
- (d) $a = -\frac{1}{3}$;
- (e) $a = -\frac{1}{4}$.

Questão 15. Seja V um espaço vetorial com produto escalar, e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V , com a propriedade que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ quando $i \neq j$, e $\|v_i\| = 2$ para todo i . Se $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo i , qual é o valor de λ_1 ?

Respostas:

- (a) $\lambda_1 = 2\langle v, v_1 \rangle$;
- (b) $\lambda_1 = 4\langle v, v_1 \rangle$;
- (c) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle/4$;
- (d) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle/2$;
- (e) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle$.

Questão 16. Determine as soluções do sistema linear não homogêneo:

$$\begin{cases} 2x + 2y & = 2, \\ 2x & + z = 1, \\ x + 2y + 2z & = -1. \end{cases}$$

Respostas:

- (a) $(x, y, z) = (-t, 1 + t, t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
- (b) $(x, y, z) = (1, 0, -1)$;
- (c) o sistema não admite soluções;
- (d) $(x, y, z) = (t, 1 - t, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$;
- (e) $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Questão 17. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 2, seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ uma base de V , e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear cuja matriz associada relativamente à base \mathcal{B} é:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine $T(2v_1 + v_2)$.

(Veja também Questão 12)

Respostas:

- (a) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + v_2$;
- (b) $T(2v_1 + v_2) = 3v_1 + 2v_2$;
- (c) $T(2v_1 + v_2) = 4v_1 + v_2$;
- (d) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + 3v_2$;
- (e) $T(2v_1 + v_2) = v_1 + 2v_2$.

Questão 18. *Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear e seja M a matriz $n \times n$ associada a T relativamente à base canônica. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

- (I) *Se T tiver n autovalores reais distintos, então M é diagonalizável;*
- (II) *Se T tiver algum autovalor repetido (ou seja, raiz do polinômio característico com multiplicidade maior que 1), então M não é diagonalizável;*
- (III) *T possui no máximo n autovalores distintos;*
- (IV) *se M é diagonalizável, então para toda base v_1, \dots, v_n de V , o vetor $T(v_i)$ é um múltiplo de v_i para todo $i = 1, \dots, n$.*

Respostas:

- (a) são verdadeiras apenas as afirmações (II), (III) e (IV);
- (b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
- (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
- (d) são verdadeiras apenas as afirmações (I), e (III);
- (e) todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 19. *Em \mathbb{R}^4 munido do produto escalar canônico, determine o subespaço ortogonal V^\perp , onde $V \subset \mathbb{R}^4$ é o subespaço gerado por $v_1 = (2, 1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 0, 1)$.*

Respostas:

- (a) $V^\perp = \{(-a, 3a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$;
- (b) $V^\perp = \{(-a, 3a, a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$;
- (c) $V^\perp = \{(c, 3a, a, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
- (d) $V^\perp = \{(-a, 3a, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$;
- (e) $V^\perp = \mathbb{R} \cdot (1, -3, -1, 0)$.

Questão 20. Como na Questão 14, determine o espaço $V \subset \mathcal{P}_3$ ortogonal ao vetor $p(x) = x^2$.

Respostas:

(a) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{5}d = 0 \right\};$

(b) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d = 0 \right\};$

(c) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{6}d = 0 \right\};$

(d) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d = 0 \right\};$

(e) $V = \left\{ a + bx + cx^2 : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = 0 \right\}.$

MAT 122 — Álgebra Linear
Prof. Paolo Piccione
Prova SUB
6 de dezembro de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **A**

Turma:

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota