

MAT 122 — Álgebra Linear – Prova 2

Prof. Paolo Piccione

4 de dezembro de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os espaços vetoriais nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é \mathbb{R} . Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Dada uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ entre espaços vetoriais, $\boxed{\text{Ker}(T)}$ denota o núcleo de T e $\boxed{\text{Im}(T)}$ a imagem de T .
- Dado um espaço vetorial V , um produto escalar em V será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e a relativa norma será denotada por $\| \cdot \|$.
- Para todo inteiro positivo n , o símbolo \mathbb{R}^n denota o espaço vetorial

$$\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

O *produto escalar canônico* de \mathbb{R}^n é definido por:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

D

Questão 1. Seja V um espaço vetorial com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear representado numa base ortonormal $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ pela matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\langle T(u), u \rangle$, onde $u = e_1 + 2e_2$.

Respostas:

- (a) $\langle T(u), u \rangle = 7$;
- (b) $\langle T(u), u \rangle = 5$;
- (c) $\langle T(u), u \rangle = 0$;
- (d) $\langle T(u), u \rangle = 3$;
- (e) $\langle T(u), u \rangle = \det(M)$.

Questão 2. Seja $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear representada na base canônica pela matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $T(x, y)$.

Respostas:

- (a) $T(x, y) = 3T(x) + 2T(y)$;
- (b) $T(x, y) = T(x) + T(y)$;
- (c) $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$;
- (d) $T(x, y) = (3x + y, 2x + 2y)$;
- (e) $T(x, y) = (3x + 2y, x + 2y)$.

Questão 3. Em \mathbb{R}^4 munido do produto escalar canônico, determine o subespaço ortogonal V^\perp , onde $V \subset \mathbb{R}^4$ é o subespaço gerado pelos vetores $v_1 = (2, 1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, -2, 0)$.

Respostas:

- (a) $V^\perp = \{(c, 3a, a, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$;
- (b) $V^\perp = \mathbb{R} \cdot (1, -3, -1, 0)$;
- (c) $V^\perp = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1, 0)$;
- (d) $V^\perp = \{(-a, 3a, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$;
- (e) $V^\perp = \{(-a, 3a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$.

Questão 4. Como na Questão 13, determine o espaço $V \subset \mathcal{P}_3$ ortogonal ao vetor $p(x) = x$.

Respostas:

- (a) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d = 0 \right\};$
 (b) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d = 0 \right\};$
 (c) $V = \left\{ a + bx + cx^2 : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = 0 \right\};$
 (d) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{5}d = 0 \right\};$
 (e) $V = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 : -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d = 0 \right\}.$

Questão 5. Calcule os autovalores da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

- (a) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, e $\lambda_3 = 1$;
 (b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e $\lambda_3 = -1$;
 (c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 + i$, $\lambda_3 = 3 - i$ (raízes complexas);
 (d) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 3i$, $\lambda_3 = 1 - 3i$ (raízes complexas);
 (e) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Questão 6. Considere os dados da Questão 15. Determine a dimensão e uma base de $\text{Im}(T)$.

Respostas:

- (a) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, base: $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;
 (b) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$, base: $u = 2v_1 - v_2$;
 (c) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, base: $u_1 = 2v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;
 (d) $\dim(\text{Im}(T)) = 1$, base: $u = v_3$;
 (e) $\dim(\text{Im}(T)) = 2$, base: $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_3$.

Questão 7. *Determine um autovetor com autovalor $\lambda = 2$ da matriz:*

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

- (a) $(3, -1, 4)$;
- (b) $(-3, 1, 4)$;
- (c) $\lambda = 2$ não é um autovalor de B ;
- (d) $(3, 1, 4)$;
- (e) $(-3, -1, 4)$.

Questão 8. *Escolha entre as afirmações abaixo sobre a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

qual apresenta o raciocínio correto, e que leva à conclusão correta.

- (I) Matrizes que possuem apenas um autovalor ou são diagonais, ou não são diagonalizáveis. Assim, a matriz A não é diagonalizável, pois ela possui um único autovalor $\lambda = 2$ e A não é diagonal.
- (II) A matriz A não é diagonalizável, pois seu polinômio característico possui raízes complexas.
- (III) A matriz A é diagonalizável, pois seu polinômio característico não possui raízes complexas.
- (IV) A matriz A não é diagonalizável, pois seus autovalores são menores que o determinante de A^2 .

Respostas:

- (a) apenas a (III) é correta;
 - (b) apenas a (IV) é correta;
 - (c) todos os raciocínios são falsos;
 - (d) apenas a (II) é correta;
 - (e) apenas a (I) é correta.
-

Questão 9. Considere o produto escalar canônico do \mathbb{R}^3 , e a base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 2)$. Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base ortonormal obtida de \mathcal{B} pelo método de Gram-Schmidt. Calcule e_2 .

Respostas:

- (a) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1)$;
- (b) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$;
- (c) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$;
- (d) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$;
- (e) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$.

Questão 10. Seja $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador linear e seja M a matriz $n \times n$ associada a T relativamente à base canônica. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- (I) Se T tiver n autovalores reais distintos, então M é diagonalizável;
- (II) Se T tiver algum autovalor repetido (ou seja, raiz do polinômio característico com multiplicidade maior que 1), então M não é diagonalizável;
- (III) T possui no máximo n autovalores distintos;
- (IV) se M é diagonalizável, então existe uma base v_1, \dots, v_n de V tal que $T(v_i)$ é um múltiplo de v_i para todo $i = 1, \dots, n$.

Respostas:

- (a) são verdadeiras apenas as afirmações (II), (III) e (IV);
 - (b) são verdadeiras apenas as afirmações (I), (III) e (IV);
 - (c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
 - (d) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
 - (e) todas as afirmações são verdadeiras.
-

Questão 11. Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (y, y, y)$, e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ a base de \mathbb{R}^3 dada por $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Determine a matriz M associada a T relativamente à base \mathcal{B} .

Respostas:

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

(d) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

(e) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Questão 12. Considere em \mathbb{R}^3 um produto escalar no qual a base formada por $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ é ortonormal. Denote com $\|\cdot\|$ a norma relativa a este produto escalar. Calcule $\|(x, y, z)\|^2$

Respostas:

(a) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy;$

(b) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz;$

(c) $\|(x, y, z)\|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz;$

(d) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz;$

(e) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2.$

Questão 13. No espaço vetorial $\mathcal{P}_3(x)$ de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a 3 na variável x , considere o produto escalar definido por:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) \, dx.$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ de forma tal que o polinômio $p(x) = x$ seja ortogonal ao polinômio $q(x) = x + ax^2$.

(O espaço $\mathcal{P}_3(x)$ com o mesmo produto escalar é considerado também na Questão 4)

Respostas:

- (a) $a = -\frac{4}{5}$;
- (b) $a = -\frac{1}{3}$;
- (c) $a = -\frac{1}{4}$;
- (d) $a = -\frac{4}{3}$;
- (e) $a = -\frac{3}{2}$.

Questão 14. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2, seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ uma base de V , e seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear cuja matriz associada relativamente à base \mathcal{B} é:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine $T(v_1 + v_2)$.

(Veja também Questão 20)

Respostas:

- (a) $T(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$;
 - (b) $T(v_1 + v_2) = 3v_1 + 2v_2$;
 - (c) $T(v_1 + v_2) = 3v_1 + v_2$;
 - (d) $T(v_1 + v_2) = v_1 + 3v_2$;
 - (e) $T(v_1 + v_2) = v_1 + 2v_2$.
-

Questão 15. *Seja V um espaço vetorial com $\dim(V) = 3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V , e $T: V \rightarrow V$ um operador linear representado pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*na base \mathcal{B} . Determine a dimensão e uma base de $\text{Ker}(T)$.
(veja também Questão 6)*

Respostas:

- (a) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, base: $w = 2v_1 - v_2$;
- (b) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, base: $w = v_1 + v_2$;
- (c) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, base: $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_1 + v_2$;
- (d) $\dim(\text{Ker}(T)) = 1$, base: $w = v_1 - v_2$;
- (e) $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, base: $w_1 = 2v_1 - v_2$, $w_2 = v_3$.

Questão 16. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido do produto escalar canônico. Determine a projeção ortogonal $P_W(v)$ do vetor $v = (1, 2, 3)$ no subespaço W gerado pelos vetores $(1, -1, 0)$ e $(-1, 1, 1)$.*

Respostas:

- (a) $P(v) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$;
- (b) $P(v) = (-1, \frac{1}{2}, 3)$;
- (c) $P(v) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3)$;
- (d) $P(v) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$;
- (e) $P(v) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3)$.

Questão 17. *Calcule o polinômio característico $P(\lambda)$ do operador linear $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representado na base canônica pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

- (a) $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda - 37$;
- (b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda - 31$;
- (c) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 22$;
- (d) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 47$;
- (e) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 51$.

Questão 18. *Quais dos vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, abaixo é um autovetor do operador $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representado na base canônica pela matriz M :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

- (a) somente v_1 e v_3 ;
- (b) somente v_2 ;
- (c) somente v_3 ;
- (d) os três vetores são autovetores de T ;
- (e) somente v_1 .

Questão 19. *Seja V um espaço vetorial (de dimensão finita) com produto escalar, e seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V , com a propriedade que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ quando $i \neq j$. Se $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo i , qual é o valor de λ_1 ?*

Respostas:

- (a) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle$;
- (b) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v\|$;
- (c) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v_1\|$;
- (d) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v_1\|^2$;
- (e) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v\|^2$.

Questão 20. *Sejam V , \mathcal{B} , T e M como na Questão 14. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

- (I) v_1 é um autovetor de T ;
- (II) v_2 é um autovetor de T ;
- (III) $\lambda = 1$ é um autovalor de T ;
- (IV) T é diagonalizável.

Respostas:

- (a) Apenas as afirmações (I), (II) e (III) são verdadeiras;
 - (b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;
 - (c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
 - (d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
 - (e) Todas as afirmações são verdadeiras.
-

MAT 122 — Álgebra Linear

Prof. Paolo Piccione

Prova 2

4 de dezembro de 2018

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas D

Turma:

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota