MAT 122 — Álgebra Linear – Prova 2

Prof. Paolo Piccione

4 de dezembro de 2018

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- Todos os espaços vetorias nesta prova são *reais*, ou seja, seu corpo de escalares é $\mathbb{R}$. Os espaços podem ter dimensão finita ou não.
- Data uma transformação linear $T\colon V \to W$ entre espaços vetoriais, $\boxed{\mathrm{Ker}(T)}$ denota o núcleo de T e $\boxed{\mathrm{Im}(T)}$ a imagem de T.
- Dado um espaço vetorial V, um produto escalar em V será denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$, e a relativa norma será denotada por $\|\cdot\|$.
- Para todo inteiro positivo n, o símbulo $\mathbb{R}^n$ denota o espaço vetorial
$$\big\{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall\, i = 1,\ldots,n\big\}.$$
O *produto escalar canônico* de $\mathbb{R}^n$ é definido por:
$$\big\langle (x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{C}}$

Questão 1. *Calcule os autovalores da matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, e $\lambda_3 = 1$;

(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e $\lambda_3 = -1$;

(d) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3 + i$, $\lambda_3 = 3 - i$ (raízes complexas);

(e) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 3i$, $\lambda_3 = 1 - 3i$ (raízes complexas).

Questão 2. *Sejam V, $\mathcal{B}$, T e M como na Questão 19. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(I) *v_1 é um autovetor de T;*
(II) *v_2 é um autovetor de T;*
(III) *$\lambda = 1$ é um autovalor de T;*
(IV) *T é diagonalizável.*

Respostas:

(a) Apenas as afirmações (I), (II) e (III) são verdadeiras;

(b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(c) Todas as afirmações são verdadeiras;

(d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(e) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 3. *Calcule o polinômio caraterístico $P(\lambda)$ do operador linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representado na base canônica pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

(a) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda - 51$;

(b) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \lambda - 22$;

(c) $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 9\lambda - 37$;

(d) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - \lambda - 47$;

(e) $P(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - \lambda - 31$.

Questão 4. *Seja $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear e seja M a matriz $n \times n$ associada a T relativamente à base canônica. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?*

(I) *Se T tiver n autovalores reais distintos, então M é diagonalizável;*
(II) *Se T tiver algum autovalor repetido (ou seja, raíz do polinômio caraterístico com multiplicidade maior que 1), então M não é diagonalizável;*
(III) *T possui no máximo n autovalores distintos;*
(IV) *se M é diagonalizável, então existe uma base $v_1, \ldots, v_n$ de V tal que $T(v_i)$ é um múltiplo de v_i para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Respostas:

(a) são verdadeiras apenas as afirmações (II), (III) e (IV);
(b) são verdadeiras apenas as afirmações (I), (III) e (IV);
(c) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Questão 5. *Considere os dados da Quesão 14. Determine a dimensão e uma base de* $\mathrm{Im}(T)$.

Respostas:

(a) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = 2v_1 - v_2$, $u_2 = v_3$;
(c) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$, base: $u = v_3$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$, base: $u = 2v_1 - v_2$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$, base: $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_3$.

Questão 6. *Considere em $\mathbb{R}^3$ um produto escalar no qual a base formada por $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ é ortonormal. Denote com $\|\cdot\|$ a norma relativa a este produto escalar. Calcule $\|(x, y, z)\|^2$*

Respostas:

(a) $\|(x, y, z)\|^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz$;
(b) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz$;
(c) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy$;
(d) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2$;
(e) $\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz$.

Questão 7. *Como na Questão 11, determine o espaço $V \subset \mathcal{P}_3$ ortogonal ao vetor $p(x) = x$.*

Respostas:

(a) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d = 0\Big\}$;

(b) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d = 0\Big\}$;

(c) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{5}d = 0\Big\}$;

(d) $V = \Big\{a + bx + cx^2 + dx^3 : a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d = 0\Big\}$;

(e) $V = \Big\{a + bx + cx^2 : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c = 0\Big\}$.

Questão 8. *Seja $V = \mathbb{R}^3$ munido do produto escalar canônico. Determine a projeção ortogonal $P_W(v)$ do vetor $v = (1, 2, 3)$ no subespaço W gerado pelos vetores $(1, -1, 0)$ e $(-1, 1, 1)$.*

Respostas:

(a) $P(v) = \big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3\big)$;
(b) $P(v) = \big(-1, \frac{1}{2}, 3\big)$;
(c) $P(v) = \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\big)$;
(d) $P(v) = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\big)$;
(e) $P(v) = \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\big)$.

Questão 9. *Escolha entre as afirmações abaixo sobre a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

qual apresenta o raciocínio correto, e que leva à conclusão correta.

(I) Matrizes que possuem apenas um autovalor ou são diagonais, ou não são diagonalizáveis. Assim, a matriz A não é diagonalizável, pois ela possui um uúnico autovalor $\lambda = 2$ e A não é diagonal.
(II) A matriz A não é diagonalizável, pois seu polinômio caraterístico possui raízes complexas.
(III) A matriz A é diagonalizável, pois seu polinômio caraterístico não possui raízes complexas.
(IV) A matriz A não é diagonalizável, pois seus autovalores são menores que o determinante de A^2.

Respostas:

(a) apenas a (III) é correta;
(b) apenas a (I) é correta;
(c) todos os raciocínios são falsos;
(d) apenas a (II) é correta;
(e) apenas a (IV) é correta.

Questão 10. *Em $\mathbb{R}^4$ munido do produto escalar canônico, determine o subespaço ortogonal $V^\perp$, onde $V \subset \mathbb{R}^4$ é o subespaço gerado por $v_1 = (2,1,-1,0)$, $v_2 = (1,0,1,0)$ e $v_3 = (1,1,-2,0)$.*

Respostas:

(a) $V^\perp = \big\{(-a, 3a, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\big\}$;
(b) $V^\perp = \big\{(c, 3a, a, b) : a, b, c \in \mathbb{R}\big\}$;
(c) $V^\perp = \big\{(-a, 3a, a, a) : a \in \mathbb{R}\big\}$;
(d) $V^\perp = \mathbb{R} \cdot (1, 0, -1, 0)$;
(e) $V^\perp = \mathbb{R} \cdot (1, -3, -1, 0)$.

Questão 11. *No espaço vetorial $\mathcal{P}_3(x)$ de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a 3 na variável x, considere o produto escalar definido por:*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x.$$

Determine $a \in \mathbb{R}$ de forma tal que o polinômio $p(x) = x$ seja ortogonal ao polinômio $q(x) = x + ax^2$.
(O espaço $\mathcal{P}_3(x)$ com o mesmo produto escalar é considerado também na Questão 7)

Respostas:

(a) $a = -\frac{1}{4}$;
(b) $a = -\frac{1}{3}$;
(c) $a = -\frac{4}{5}$;
(d) $a = -\frac{3}{2}$;
(e) $a = -\frac{4}{3}$.

Questão 12. *Considere o produto escalar canônico do $\mathbb{R}^3$, e a base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,0,1)$ e $v_3 = (0,1,2)$. Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base ortonormal obtida de $\mathcal{B}$ pelo método de Gram–Schmidt. Calcule e_2.*

Respostas:

(a) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$;
(b) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1)$;
(c) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$;
(d) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$;
(e) $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$.

Questão 13. *Quais dos vetores* $v_1 = (1,1,1)$*,* $v_2 = (0,1,0)$*,* $v_3 = (0,0,1)$*, abaixo é um autovetor do operador* $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *representado na base canônica pela matriz* M*:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

(a) os três vetores são autovetores de T;
(b) somente v_3;
(c) somente v_1 e v_3;
(d) somente v_1;
(e) somente v_2.

Questão 14. *Seja* V *ume espaço vetorial com* $\dim(V) = 3$*,* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ *uma base de* V*, e* $T\colon V \to V$ *um operador linear representado pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

na base $\mathcal{B}$*. Determine a dimensão e uma base de* $\operatorname{Ker}(T)$*.*
(veja também Questão 5)

Respostas:

(a) $\dim\bigl(\operatorname{Ker}(T)\bigr) = 1$, base: $w = v_1 + v_2$;
(b) $\dim\bigl(\operatorname{Ker}(T)\bigr) = 2$, base: $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_1 + v_2$;
(c) $\dim\bigl(\operatorname{Ker}(T)\bigr) = 1$, base: $w = 2v_1 - v_2$;
(d) $\dim\bigl(\operatorname{Ker}(T)\bigr) = 1$, base: $w = v_1 - v_2$;
(e) $\dim\bigl(\operatorname{Ker}(T)\bigr) = 2$, base: $w_1 = 2v_1 - v_2$, $w_2 = v_3$.

Questão 15. *Seja* $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear representada na base canônica pela matriz* $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$*. Calcule* $T(x,y)$*.*

Respostas:

(a) $T(x,y) = T(x) + T(y)$;
(b) $T(x,y) = 3\,T(x) + 2\,T(y)$;
(c) $T(x,y) = (3x + 2y, x + 2y)$;
(d) $T(x,y) = (x + 2y, 3x + 2y)$;
(e) $T(x,y) = (3x + y, 2x + 2y)$.

Questão 16. *Seja V um espaço vetorial (de dimensão finita) com produto escalar, e seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V, com a propriedade que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ quando $i \neq j$. Se $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo i, qual é o valor de λ_1?*

Respostas:

(a) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v\|$;
(b) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle$;
(c) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v_1\|^2$;
(d) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v_1\|$;
(e) $\lambda_1 = \langle v, v_1 \rangle / \|v\|^2$.

Questão 17. *Determine um autovetor com autovalor $\lambda = 2$ da matriz:*

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -4 & -8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Respostas:

(a) $(-3, 1, 4)$;
(b) $(3, 1, 4)$;
(c) $(3, -1, 4)$;
(d) $\lambda = 2$ não é um autovalor de B;
(e) $(-3, -1, 4)$.

Questão 18. *Seja V um espaço vetorial com produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e seja $T \colon V \to V$ um operador linear representado numa base ortonormal $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ pela matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\big\langle T(u), u \big\rangle$, onde $u = e_1 + 2e_2$.

Respostas:

(a) $\big\langle T(u), u \big\rangle = 5$;
(b) $\big\langle T(u), u \big\rangle = 0$;
(c) $\big\langle T(u), u \big\rangle = \det(M)$;
(d) $\big\langle T(u), u \big\rangle = 7$;
(e) $\big\langle T(u), u \big\rangle = 3$.

Questão 19. *Seja V um espaço vetorial de dimensão 2, seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ uma base de V, e seja $T: V \to V$ um operador linear cuja matriz associada relativamente à base $\mathcal{B}$ é:*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine $T(v_1 + v_2)$.
(Veja também Questão 2)

Respostas:

(a) $T(v_1 + v_2) = v_1 + 3v_2$;
(b) $T(v_1 + v_2) = 3v_1 + 2v_2$;
(c) $T(v_1 + v_2) = v_1 + 2v_2$;
(d) $T(v_1 + v_2) = 3v_1 + v_2$;
(e) $T(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$.

Questão 20. *Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (y, y, y)$, e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ a base de $\mathbb{R}^3$ dada por $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$. Determine a matriz M associada a T relativamente à base $\mathcal{B}$.*

Respostas:

(a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(e) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

MAT 122 — Álgebra Linear
Prof. Paolo Piccione
Prova 2
4 de dezembro de 2018

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\text{C}}$

Turma:

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**